TEXTOS UNIVERSITARIOS

Luis Piscoya Hermoza

Tópicos en epistemología

Universidad
Inca Garcilaso de la Vega
Nuevos Tiempos. Nuevas Ideas
FONDO EDITORIAL

Luis Piscoya Hermoza

Doctor en Educación y en Filosofía, grados académicos conferidos por la Universidad Nacional Mayor de San Marcos. Hizo estudios de posgrado en la Universidad de Kansas, en la Universidad de Stanford, California y en la Universidad de Chile. Asimismo, es Doctor Honoris Causa por la Universidad de Trujillo y profesor honorario de la Universidad Ricardo Palma. En San Marcos se ha desempeñado como director de la Escuela de Posgrado, jefe del ex Departamento Académico de Humanidades y director de la revista *Letras*. Actualmente es profesor principal en los programas de Maestría en Epistemología y en el Doctorado en Filosofía, donde dirige seminarios de Lógica Matemática y Epistemología de las ciencias naturales y formales. Fue profesor investigador visitante del Departamento de Filosofía de la Universidad de Dortmund (1992), del Departamento de Filosofía de la Universidad de Castellón (1997) y del Instituto de Filosofía, Epistemología y Lógica de la Universidad de Ludwig Maximiliam de Múnich (1999-2000), entre otras.

Entre sus más recientes publicaciones tenemos: *Formación universitaria vs. mercado laboral* (2006), *El proceso de la investigación científica, un caso y glosarios* (2007), *Formación universitaria vs. mercado laboral II* (2008) y *Retos de la matemática: el CONAMAT* (2009).

Luis Piscoya Hermosa

TÓPICOS EN EPISTEMOLOGÍA

Serie: *Textos universitarios /Filosofía*

Luis Piscoya Hermosa

Tópicos en Epistemología

Universidad
Inca Garcilaso de la Vega
Nuevos Tiempos. Nuevas Ideas
FONDO EDITORIAL

FICHA TÉCNICA

Título:	Tópicos en epistemología
Autor:	Luis Piscoya Hermosa
Serie:	Textos Universitarios / Filosofía
Código:	TU/FILO-003-2008
Edición:	Fondo Editorial de la UIGV
Formato:	170 mm. X 245 mm. 315 pp.
Impresión:	Offsett y encuadernación en rústica
Soporte:	Cubierta: folcote calibre 12
	Interiores: bond alisado de 80 gr.
Publicado:	Lima, Perú. Diciembre de 2009
Edición:	Segunda.

Universidad Inca Garcilaso de la Vega
Rector: Luis Cervantes Liñán
Vicerrector: Jorge Lazo Manrique
Jefe del Fondo Editorial: Lucas Lavado

© Universidad Inca Garcilaso de la Vega

Av. Arequipa 1841 - Lince
Teléf.: 471-1919
Página Web: www.uigv.edu.pe

Fondo Editorial
Editor: Lucas Lavado
Correo electrónico: llavadom@hotmail.com
Jr. Luis N. Sáenz 557 - Jesús María
Teléf.: 461-2745 Anexo: 3712
Correo electrónico: fondo_editorial@uigv.edu.pe

Coordinación académica: Carmen Zevallos Choy
Carátula: Mario Quiroz Martínez
Diagramación y revisión: Christian Córdova Robles

Este material de enseñanza se hace en concordancia con lo dispuesto por la legislación sobre derechos de autor.

DECRETO LEGISLATIVO N° 822

Art. 43.- Respecto de las obras ya divulgadas lícitamente, es permitida sin autorización del autor:

La reproducción por medios reprográficos, para la enseñanza o realización de exámenes en instituciones educativas, siempre que no haya fines de lucro y en la medida justificada por el objetivo perseguido, de artículos o de breves extractos de obras lícitamente publicadas, a condición de que tal utilización se haga conforme a los usos honrados y que la misma no sea objeto de venta u otra transacción a título oneroso, ni tenga directa o indirectamente fines de lucro.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 1501132000-2166
ISBN: 978-612-4050-07-7

Índice

Presentación del Fondo Editorial 9
Prólogo 11
I. EL CAMPO DE LA EPISTEMOLOGÍA 15
¿Qué es la epistemología? 17
Las tres tareas de la epistemología 29
La epistemología genética 37
Ciencia y seudociencia 55

II. LA INDUCCIÓN 61
La inducción clásica 63
Método indirecto de la diferencia 72
Concepciones clásicas de la probabilidad 79
Inducción matemática 105
Modus Ponens vs. verdades inductivas en matemática 119

III. TEORÍA DE LA VERDAD 131
La teoría probabilística del significado 133
Verdad y prueba 145
El uso decreciente del concepto de verdad en la epistemología contemporánea 165
Es justificable todavía el uso de concepto de verdad en epistemología 175
La racionalidad como no-arbitrariedad 185

IV. EPISTEMOLOGÍA DE LA TECNOLOGÍA 191
El compromiso valorativo de la tecnologia 193
Humanismo, ciencia y globalización 203

V. LÓGICA MATEMÁTICA 213
Lógicas no-clásicas: Los cálculos C_n de Newton C.A. da Costa 215
Variedades aritméticas versus modelo *standard* 229
Reconstrucción lógica de la teoría elemental de la probabilidad 239

VI. INTELIGENCIA ARTIFICIAL 261
Lógica e inteligencia artificial 263
Inteligencia artificial y derecho 277
Inteligencia artificial y el concepto de mente 285

PRUEBAS DE AUTOEVALUACIÓN 291

Presentación del Fondo Editorial

El cerebro imagina un objeto real a partir de una imagen del ojo tan pequeña como un sello de correos. Me parece increíble que podamos pasar de una pequeña imagen al sentido de la realidad del mundo.

Richard Gregory

Tópicos en epistemología, de Luis Piscoya Hermoza, profesor de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, es con seguridad un libro que cubre un vacío grande en el campo de la enseñanza y de la investigación. La epistemología está involucrada con el proceso del conocimiento científico, con sus problemas, hipótesis, enfoques y métodos. La amplia y fecunda actividad docente e investigadora del autor se manifiestan en este volumen que con seguridad esperan los lectores.

No es fácil hacer epistemología en un país donde las investigaciones están limitadas por la carencia de apoyo para la investigación científica y tecnológica en los diferentes campos. La presencia influyente de filosofía posmoderna y hermenéutica, así como la sustitución creciente de la explicación científica por la interpretación como método predominante son síntomas evidentes del debilitamiento del realismo científico y de la racionalidad.

Esta es la segunda edición, ampliada, revisada y puesta al día por el autor. Está conformada por cinco capítulos que cubren aquellos temas y problemas que conciernen a las tareas de la epistemología actual; incluye finalmente pruebas de autoevaluación, lo que posibilitará su mejor utilización en las escuelas de posgrados, donde el profesor Piscoya es ampliamente reconocido.

Agradecemos al profesor Piscoya por habernos confiado la edición de este importante libro que estamos seguros contribuirá a mejorar la calidad de los estudios en epistemología.

Fondo Editorial

Diciembre 2009

Prólogo

La segunda edición de *Tópicos en Epistemología* incluye algunas variantes respecto de la primera, que se publicó en el año 2000, aunque su objetivo nuclear continúa siendo el mismo. Es un libro diseñado para ejercitar en el análisis epistemológico de los problemas más relevantes de la ciencia contemporánea a estudiantes que cursan posgrado de investigación o de especialización y a aquellos de pregrado que han elegido la carrera de filosofía motivados por la necesidad intelectual de comprender la problemática relacionada con la confiabilidad y validez de la ciencia, así como con el impacto que ella tiene sobre el desarrollo humano. Naturalmente, también ha sido nuestro propósito ofrecer a los académicos que ejercen la docencia en el pregrado y en el posgrado, conduciendo cursos y seminarios de epistemología, un instrumento de apoyo a la tematización que, al mismo tiempo, brinde recursos para una dirección productiva del aprendizaje.

En esta edición hemos añadido dos capítulos de análisis de problemas, y uno de pruebas de comprensión de lectura, a los cuatro capítulos que constituyeron la versión anterior. Mediante el nuevo Capítulo IV hemos concedido un espacio especial a la epistemología de la tecnología con dos artículos que exploran el compromiso valorativo de la lógica de la investigación tecnológica y el impacto de sus productos o resultados en el desarrollo humano, en el contexto de la denominada globalización. Asimismo, hemos establecido un deslinde preciso con las tendencias que han optado por el discurso oscuro, misterioso y mágico, las que se precian de argumentar sin que les importe explicar con claridad y rigor lógico y aportar pruebas factuales compatibles con los requisitos epistemológicos que singularizan a la metodología de la investigación científica.

El Capítulo V lo hemos diseñado como un espacio específico para la reflexión sobre lógica matemática. Al artículo sobre *Los cálculos de C_N de Newton C.A. da Costa*, hemos añadido dos trabajos sobre aportes visionarios. El primero titulado *Variedades aritméticas vs. el modelo standard* y el segundo *Construcción lógica de la teoría elemental de la probabilidad*. Ambos tratan temas que preocuparon a los filósofos del Círculo de Viena en base a resultados de la investigación en lógica matemática estos hallazgos fueron sorprendentes para la comunidad filosófica neopositivista que tenía formación especializada para acceder a ellos y columbrar sus repercusiones futuras, las mismas que desde fines del siglo XX, a través de la divulgación, constituyen «argumentos recientes» para diversas tendencias filosóficas de popularidad literaria. El primer resultado, debido principalmente a Skolem, mostraba la posibilidad de las múltiples maneras de construir aritméticas con conjuntos distintos a los que trabajó Peano, hecho que puso en evidencia que podría ser más propio hablar de los modelos de Peano y no del clásico modelo *standard* de Peano que conocemos, en la mayor parte de los casos, como el único posible.

La proclividad por las creencias rígidas en las soluciones únicas, fortalecida por la tradición filosófica de los juicios sintéticos *a priori*, ha sido definitivamente neutralizada por múltiples resultados, como el anterior, que muestran de manera concluyente que ni siquiera en la aritmética formalizada las soluciones son necesarias, en la medida que admiten alternativas igualmente aceptables. El segundo resultado fue un esfuerzo incomprendido de Reichenbach por mostrar la insuficiencia de la lógica bivalente para evaluar la validez de los argumentos y de las afirmaciones de la microfísica. En ese sentido, dicho filósofo hizo un aporte señero al hacer explícita la lógica subyacente en el cálculo elemental de las probabilidades y demostrar la mayor adecuación de este instrumento para afrontar las inferencias de la mecánica cuántica, sujetas a márgenes de incertidumbre, teóricamente no eliminables. No es necesario ahondar detalles, en nuestros días, para llamar la atención sobre el hecho de que, en las últimas tres décadas, tanto filósofos como científicos sociales y naturales que invocan la teoría de sistemas complejos se refieren con alguna frecuencia a la probabilidad y al manejo de la incertidumbre como conquistas recientes. En síntesis, el Capítulo V apunta hacia una mejor comprensión de que la flexibilidad, el antidogmatismo y la tolerancia del presente tienen su soporte epistemológico en esclarecimientos visionarios que han demandado a los filósofos formación lógica y matemática seria, herramienta que es actualmente aún más necesaria para ayudarnos a neutralizar los mitos del presente que obstaculizan una mejor construcción del futuro.

En el anexo sobre pruebas de comprensión del lectura, hemos corrido conscientemente el riesgo de que se nos tilde de «demasiado escolares» debido a que nuestra experiencia en la conducción de seminarios de epistemología, en el nivel de posgrado, ha puesto en evidencia la necesidad de entregar una agenda problemática, con elementos comunes, a los grupos multidisciplinarios de estudiantes de curso de epistemología de maestría y doctorado. Así se facilita la tarea de ordenar el debate y propiciar el logro de resultados tangibles, comparables y enriquecedores con independencia de que los participantes en el seminario tengan formaciones profesionales diversas. Por tanto, las pruebas de selección múltiple incluidas no están orientadas a ser utilizadas para aprobar o reprobar alumnos sino para proporcionar ejemplos de una agenda de debate semanal constituida por cuestiones problemáticas que suscitan el análisis, la argumentación, el manejo de ejemplos y contraejemplos, la deducción lógicamente valida y la argumentación precisa que proporciona fundamento razonable a las conclusiones e inteligibilidad a la formulación de los problemas que quedan abiertos. En breve, las pruebas aportadas son principalmente instrumentos para el aprendizaje de las estrategias del debate filosófico iniciadas por Sócrates.

Como se comprenderá, dichas pruebas de selección múltiple han sido utilizadas por el autor en los seminarios de epistemología que ha dictado principalmente en programas de doctorado del Perú. Fueron entregadas a los doctorandos junto con los textos de las lecturas, dándoles una semana de plazo para que realicen la lectura personal, el trabajo de grupo con sus colegas del seminario y consultas bibliográficas con otros profesores que consideren adecuados. Este procedimiento ha permitido poner a prueba la capacidad de los doctorandos para aprovechar productivamente el apoyo externo sin que se diluya la responsabilidad personal en la medida en que cada uno tuvo la obligación de presentar un informe individual, con nombre propio, justificando a través de un texto breve la alternativa de respuesta que había sido elegida como correcta. Salvo escasas excepciones, la tendencia observada ha sido que la mayoría de los examinados alcanza en la primera semana el 50%

o menos del total de los aciertos esperados. Estos resultados han dado lugar a un trabajo de hasta dos semanas para conceder tiempo suficiente a correcciones, aclaraciones y sugerencias complementarias adecuadas a la superación de las deficiencias de fondo y forma detectadas en los desempeños de los doctorandos, lo cual nos ha aproximado, en los hechos, al ideal de la enseñanza personalizada. En ningún caso he proporcionado claves de respuesta porque ello hubiera equivalido a debilitar o eliminar el placer del safari intelectual a los candidatos a cazadores acreditados de la verdad.

En su conjunto, este volumen está constituido por veintiún artículos, dieciséis de los cuales son trabajos originales del autor que, en los casos que se señalan con la referencia bibliográfica correspondiente, han sido publicados en revistas especializadas del país o del extranjero. Los cinco restantes constituyen versiones castellanas de segmentos de obras de Reichenbach, Piaget, Tarski y Lakatos, cuyas fuentes se precisan en las referencias bibliográficas que figuran al inicio de cada uno de los artículos. La traducción al castellano de cuatro de ellos ha sido realizada por el que suscribe este prólogo y, en cada caso, incluye correcciones respecto de los textos publicados en la primera edición. El artículo de Lakatos fue traducido por dos profesores de la Escuela de Traductores de la Universidad Nacional de Trujillo. La revisión técnica ha estado a cargo del autor.

Termino esta nota introductoria expresando mi gratitud al profesor Lucas Lavado, director del Fondo Editorial de la Universidad Inca Garcilaso de la Vega, por haberme invitado y alentado para realizar la tarea de entregar a publicación una edición corregida y aumentada de un texto difícil de componer tipográficamente por la gran cantidad de signos especiales que demanda y por la exactitud con la que hay que usarlos para no incurrir en errores de magnitud. A la profesora Julia Rubio debo expresarle mi profunda gratitud por su apoyo generoso para reiniciar las correcciones, tarea interrumpida por una súbita cirugía al ojo izquierdo. El profesor Fernando Varas merece una mención especial porque es la persona que con paciencia y esmero ha tenido a su cuidado la digitación y el diseño de todas las formulas lógicas y matemáticas que contiene este volumen. En la digitación de los textos he recibido nuevamente el apoyo generoso de las señoritas Jane López Correa y Nancy Castro. Son muy numerosos los doctorandos que con sus sugerencias y preguntas me han dado oportunidad de corregir las traducciones y de ampliar el contenido de algunos artículos, especialmente del primero, el cual no cubría las tendencias filosóficas literarias, denominadas posmodernas, que han incrementado su presencia en las dos últimas décadas del siglo XX y en lo que va del siglo XXI. A todos ellos expreso mi profunda gratitud y los eximo de toda responsabilidad en los errores y deficiencias que encuentre el lector en este volumen. Ellos son intransferibles y solo son imputables al autor, quien se somete gustosamente al tribunal de la razón que estará constituido, en este caso, por mis indulgentes pero también implacables lectores.

Lima, mayo de 2009

Luis Piscoya Hermoza

I. EL CAMPO DE LA EPISTEMOLOGÍA

Puede afirmarse que la epistemología como disciplina filosófica cultivada con un significativo nivel de autonomía data de la tercera década del siglo XX. Después de los años veinte, la filosofía de la ciencia de corte tradicional sufre una modificación sustantiva con la adopción de la lógica matemática como un nuevo instrumento de análisis del lenguaje científico. De esta manera la discusión filosófica, que siempre se formuló en el lenguaje natural, cambió de medio expresivo y se transformó en un discurso que usaba intensamente lenguajes formalizados. Así puede diferenciarse, de modo observacional, los textos del *Tractatus Logico Philosophicus* de Wittgenstein, de la *Lógica de la investigación científica* de Popper o de la *Introducción a la filosofía matemática* de Russell de libros tradicionales y famosos como la *Crítica de la Razón Pura* de Kant, que están escritos sin recurrir a lenguaje formalizado alguno. El introductor de esta nueva tendencia formalista y rigorista en la filosofía de la ciencia fue Gottlob Frege, con sus escritos esclarecedores sobre los fundamentos de la matemática y, en particular, sobre el concepto de número natural. Y entre los más entusiastas difusores y defensores de este nuevo estilo de pensar y hacer filosofía se encontraron los miembros del llamado Círculo de Viena o escuela neopositivista, que liderados por Moritz Schlick, en sus inicios, asumieron el proyecto logicista diseñado por Frege, el mismo que trató de ser desarrollado independientemente por Russell y Whitehead en su famosa obra titulada *Principia Mathematica.*

La filosofía cultivada por los neopositivistas y por sus adversarios, como Karl Popper, fue reconocida progresivamente como epistemológica a través de sus versiones en inglés, pues la palabra 'epistemología' parece haber sido usada muy poco en alemán, idioma en el que el término dominante sigue siendo '*Erkenntnistheorie*' o, en su defecto, '*Wissenschaftstheorie*', que corresponden a lo que en español conocemos como teoría del conocimiento y teoría de la ciencia, respectivamente. Ciertamente, la segunda denominación está mucho más cerca del tipo de filosofía que fueron perfilando los neopositivistas, pues ellos no estuvieron centralmente interesados en el estudio de la facultad de conocer, como sí lo estuvo Kant, sino en el análisis del producto más elaborado de tal supuesta facultad, esto es, del conocimiento científico, el cual se plasma, objetivamente, en conjuntos de proposiciones o enunciados. Cuando estos están adecuadamente sistematizados, bajo un orden lógico, constituyen una teoría que presenta la estructura de un sistema hipotético-deductivo, que es el nombre con el que actualmente se conoce a la formulación axiomática del conocimiento, tarea que fue cumplida históricamente, por vez primera, en el campo específico de la geometría, por Euclides (siglo III A. C.) en su obra genial conocida como *Elementos.*

De esta manera, la epistemología como disciplina filosófica rigurosa ha surgido proponiendo el modelo hipotético deductivo como instrumento conceptual adecuado para dar

cuenta de la naturaleza del conocimiento científico y para establecer un criterio de cientificidad, denominado por Popper, de demarcación, que permita decidir cuándo un conjunto de afirmaciones tiene un nivel adecuado de organización científica y cuándo no. Los términos de la discusión así planteada obligan a recurrir a lenguajes lógicos, a modalidades de axiomatización, a ejemplos que generalmente los proporciona la matemática y la física, y a la discusión de las llamadas propiedades metateóricas de consistencia, compleción, decidibilidad, deducibilidad, satisfabilidad, etc. Asimismo, el acceso a este nuevo contexto demanda de una formación especializada y de un entrenamiento para adquirir capacidad operativa que facilite el manejo de sistemas simbólicos de inferencia y cálculo.

Sin embargo, el establecimiento de un nuevo estilo de pensar solo es posible si desplaza al vigente o dominante. En este caso, parafraseando a Thomas Kuhn, diremos que el paradigma hipotético-deductivo desplazó al paradigma comprensivo, que gozaba de respetabilidad en los años 20 y que había consagrado la división entre ciencias del espíritu y ciencias de la naturaleza, clasificación que fue cuestionada por los neopositivistas que aspiraban a una ciencia unificada, nomológica, explicativa y predictiva. El paradigma comprensivo había sido instaurado por Dilthey para la investigación histórica y para el ámbito de las ciencias humanas, cobrando particular relevancia en el campo de la psicología. Dilthey sostenía que las ciencias naturales se caracterizaban por explicar y predecir y las ciencias del espíritu por comprender, lo cual fue inaceptable para los neopositivistas. Estos sostuvieron que un conocimiento que careciera de capacidad explicativa no era digno de llamarse científico. De otra parte, la escuela de Dilthey calificó a las ciencias del espíritu de ideográficas para así eximirlas de la obligatoriedad de expresar sus conocimientos en forma de leyes o enunciados que pretendan validez universal. Este segundo aspecto también fue objetado por los neopositivistas que resolvieron el problema, suscitado por las excepciones que conllevan las generalizaciones en el sector de las ciencias humanas, recurriendo a la estadística y al cálculo de las probabilidades, que se convirtió en el medio expresivo más utilizado por las ciencias factuales o empíricas.

La filosofía de Popper, una de las fuentes de lo que hoy conocemos como epistemología, siempre enfatizó sus discrepancias con las tesis neopositivistas, sin embargo compartió con ellas los temas de discusión, el uso de instrumentos lógico-matemáticos, la concepción lógica de la estructura de las leyes científicas y el rechazo al modelo comprensivo y al método basado en el «*verstehen*» (comprender). Posiblemente el tema de mayor discrepancia entre Popper y los dos más destacados neopositivistas, Carnap y Reichenbach, fue el referente a la inducción. Según Popper no existe prueba inductiva de la verdad de proposición factual alguna, en términos lógicos estrictos. Consecuentemente, todo lo que puede hacer el investigador, con rigor, es refutar sus hipótesis o, al menos, intentar hacerlo. De esta manera solo es posible probar lógicamente la falsedad de una hipótesis y ello es compatible con el progreso científico porque el investigador puede aprender de sus errores. Empero, para Carnap y Reichenbach sí existía la posibilidad de construir la ciencia inductivamente aunque no necesariamente utilizando hipótesis verdaderas. Ellos propusieron como alternativa el uso de hipótesis a las que se les pueda asignar un valor de probabilidad, dentro de un sistema de cálculo, que fue de tipo lógico para Carnap y de tipo estadístico frecuencial para Reichenbach.

Las variaciones, antes anotadas, no son ciertamente obstáculos para sostener que el modelo hipotético-deductivo es un aporte tanto de los neopositivistas como de algunos de

sus rivales, tal es el caso de Popper. Y afirmamos que es un genuino aporte debido a que ha viabilizado la reconstrucción lógica del conocimiento en términos que nos aproximan a decidir con rigor su verdad o falsedad y ha facilitado, notablemente, la comunicación al interior de la comunidad filosófica y de la comunidad científica y, también, entre ambas. Particularmente habían sido los científicos naturales, como Einstein, Monod o Heisenberg quienes mostraron especial interés por la nueva filosofía epistemológica e inclusive participaron directamente en su discusión. En el ámbito de las ciencias humanas han sido los conductistas, los funcionalistas y los representantes de la revalorada psicología interconductual quienes vieron con mayor simpatía el modelo hipotético-deductivo. Lo mismo se puede decir de quienes usan el modelo sistémico. En el campo de la matemática moderna, la afinidad por el modelo hipotético-deductivo ha sido notable desde los tiempos de Peano y su axiomatización de la aritmética. La obra *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell así como las sucesivas axiomatizaciones de la teoría de conjuntos de Zermelo, Fraenkel y Von Neumann son ejemplos ya no de afinidad sino de trabajo instaurador de la versión contemporánea del modelo hipotético-deductivo. Puede afirmarse, sin riesgo de error, que esta es la perspectiva que gobierna el ámbito total de los trabajos actuales en lógica matemática, con independencia de la rama o tendencia que se cultive. El proyecto francés de sistematización y reconstrucción de la matemática, realizado por el grupo Bourbaki, es otro importante ejemplo que ilustra los aportes de la orientación antes descrita.

De otra parte, el modelo hipotético-deductivo ha influido notablemente en el quehacer metodológico que se ha intensificado durante los últimos treinta y cinco años. Conocidos manuales de investigación en ciencias sociales y de la conducta, como *Investigación del comportamiento* de Fred Kerlinger, incorporan como esquema los pasos conducentes a la obtención de una teoría de forma hipotético-deductiva. Otros trabajos sobre los fundamentos del método científico, como el libro *La investigación científica* de Mario Bunge, orientados más hacia los aspectos teóricos que a los operativos, también responden a esta tendencia. Dentro de ellos se recoge resultados de la discusión iniciada por los neopositivistas sobre la naturaleza de los conceptos científicos, los niveles del lenguaje científico y las propiedades que debe satisfacer una buena teoría. En este sector la influencia de Popper se hace patente en el hecho de que, prácticamente, la expresión «verificación de hipótesis» ha desaparecido del vocabulario metodológico para dejar su lugar a la noción de contrastación de hipótesis, término con el cual se ha traducido a Popper al español. Asimismo, el llamado enfoque sistémico es inteligible como las transformaciones que se realizan dentro de un sistema lógico cuando se lo aplica a procesos reales, entendidos como totalidades espacio-temporales, las cuales pueden ser organismos o máquinas. De este modo se produce la conversión de un sistema de fórmulas, atemporal y estático (el sistema lógico), en uno material y dinámico.

Las repercusiones antes descritas han destacado las posibilidades integradoras y unificadoras del modelo hipotético-deductivo, lo cual explica el afianzamiento de la Epistemología, como disciplina, a través del interés creciente que muestran las comunidades científicas en sus aportes, que son en gran medida esclarecimientos. En efecto, más inmediato resulta señalar los esclarecimientos que el trabajo epistemológico ha aportado a la ciencia que los nuevos hallazgos que ha propiciado. El ejemplo de las paradojas de la teoría de conjuntos, resueltas por diferentes medios, como la teoría de los tipos de Russell; o las limitaciones del uso del concepto de verdad, puestas en evidencia por Tarski, son suficientes para ilustrar un aporte esclarecedor que ha posibilitado poner fin a discusiones desorientadoras o

reformularlas en términos que hagan posible soluciones precisas. En el nivel práctico, el esclarecimiento de las insolubles implicancias del término verificación ha posibilitado la propuesta de orientaciones metodológicas más productivas. Ello mismo ha conllevado el abandono de seguridades ingenuas y apriorísticas de cepa hegeliana y kantiana.

El modelo hipotético-deductivo, ya sea en su versión inductivista representada en su última fase por la teoría de la confirmación de Hempel, o en su versión no inductivista representada por la tesis de la falsibilidad de las hipótesis de Popper, es compatible con la conmensurabilidad de las teorías y con la aceptación de un progreso científico o de un perfeccionamiento del conocimiento humano. Así, una teoría **T** es comparativamente preferible a una **W** si **T** es capaz de explicar todos los hechos que puede explicar **W** y además ciertos hechos que no son compatibles con **W**. Esto es, los hechos falseadores de W, no son hechos falsadores de **T**, pero, al mismo tiempo, el conjunto de posibles falsadores de **T** es diferente del conjunto vacío. Análogamente, una teoría **T** es lógicamente más general que una **W** si los axiomas de **W** son deducibles, como teoremas, desde los axiomas de **T** y no se cumple la situación inversa. De esto se deduce que el cambio científico se da cuando una teoría **T** es reemplazada por otra **W** que posee mayor poder explicativo y mayor generalidad en relación con **T**. En caso de que **T** sea una teoría que articula y proporciona fundamento a una red de teorías consideradas verdaderas por las comunidades científicas, este cambio constituye una revolución científica y puede no ser suficientemente entendida, inmediatamente, por los investigadores que casi normalmente se resistirán a aceptar las nuevas tesis sustentadas por **W**.

Las críticas al modelo hipotético-deductivo y a sus correlatos teóricos se generaron paralelamente al desarrollo de este. Poincaré, por citar un caso notable, fue duro crítico del proyecto logicista de Russell desarrollado en *Principia Mathematica*. Defendió, intuitivamente, la tesis de que el principio de inducción matemática no era reducible a proposiciones analíticas o puramente lógicas. Estuvo en lo correcto al formular esta conjetura pero no dispuso de medios adecuados para demostrarla. Han sido los desarrollos de la misma lógica-matemática, a través de la teoría de modelos, los que algunos años después permitieron probar la existencia de estructuras matemáticas no-inductivas, lo que ha conducido a demostrar de manera concluyente el carácter no-analítico de dicho principio. Sin embargo, la crítica de Poincaré, tal vez, hay que entenderla como una objeción a una pretensión específica del modelo hipotético-deductivo y no al modelo mismo. Las objeciones radicales han venido de las canteras de Thomas Kuhn quien en su libro, *La estructura de las revoluciones científicas,* ha sostenido la inconmensurabilidad de las teorías científicas y sustituido el concepto de verdad de una teoría por el de vigencia de un paradigma de ciencia normal, entidad conceptual que, según Kuhn, posee un núcleo teórico pero que, además, tiene componentes irracionales como, por ejemplo, una institucionalidad con sus jerarquías, libros guías y autoridades. De esta suerte, el cambio científico estaría más ligado al agotamiento histórico de un paradigma que a cuestiones relacionadas con la capacidad explicativa o la generalidad de las teorías. El concepto de verdad no sería determinante para decidir el cambio porque está sujeto, como los otros conceptos científicos, a los condicionamientos del paradigma vigente. Consecuentemente, el cambio de paradigma también acarrea cambios en el concepto de verdad, el mismo que carecería de la objetividad que presuponen los cultores del modelo hipotético-deductivo. Aparentemente, las consecuencias del punto de vista kuhniano coincidirían con la tesis de Tarski que circunscribe la definición de 'verdad'

a un lenguaje L determinado y concluye que no es posible establecer ningún criterio general de verdad. Empero, la tesis de Tarski presupone que existe, objetivamente, la necesidad de usar consistentemente el concepto de verdad y que la contradicción es una deficiencia que inhabilita una teoría T. Ciertamente, la presencia de una contradicción no se anula quitándole vigencia sino reestructurando el lenguaje de tal manera que sus reglas no la hagan posible. No es este el lugar para abordar con detalle las objeciones de Kuhn sino solo para anotar sus tesis como adversas a la solidez del modelo hipotético-deductivo, al cual el filósofo alemán Stegmüller ha denominado *«statement point of view»* (punto de vista del enunciado), para oponerlo a posiciones historicistas, como las del mismo Kuhn, o genéticas como las de Piaget. En lo que se refiere a este último, sus reservas no están dirigidas, propiamente, al modelo hipotético-deductivo en cuanto tal sino a sus insuficiencias y a la necesidad de complementarlo con los aportes de la investigación psicológica experimental para dar cuenta satisfactoriamente del conocimiento científico en su integridad. Piaget considera al punto de vista del enunciado, hasta cierto punto, esclarecedor de la naturaleza lógica de la ciencia. Sin embargo, sostiene que una aproximación más completa se logra si no solo se analiza la lógica del resultado del proceso sino, también, la del proceso mismo que conduce a la producción de dicho resultado. En otras palabras, no sería suficiente analizar las teorías, pues para comprenderlas en su integridad sería necesario examinar el proceso cognitivo que las produce, esto es, el modelo hipotético-deductivo debería ser complementado con un estudio psicogenético del conocimiento que ponga en evidencia las bases conductuales, mentales y ambientales que lo convierten en verdadero y que explican su organización lógica.

Una crítica, más radical, proviene de algunos representantes del pensamiento dialéctico que consideran que el modelo hipotético-deductivo, se sustenta en una lógica que se cumple en determinado segmento histórico del proceso de producción de conocimientos pero no en periodos de duración considerable, en los cuales se producen irremediablemente contradicciones que no anulan la fecundidad del proceso sino, al contrario, garantizan saltos cualitativos que perfeccionan el conocimiento humano. Asimismo, las contradicciones no serían puramente formales sino ontológicas por ocurrir en la realidad y reflejarse en el conocimiento. Consecuentemente, el modelo hipotético-deductivo expresaría su unilateralidad al considerar a la contradicción como sinónimo de absurdo y de imposibilidad de racionalidad. De lo anterior se deduciría que la lógica que supla las deficiencias antes anotadas sería una que exprese el movimiento total de la realidad, vale decir, la llamada lógica dialéctica. Asimismo, desde este ángulo, el modelo hipotético-deductivo solo podría tener alguna utilidad si se lo inscribe dentro del marco del pensamiento dialéctico y se lo depura de todo aquello que se oponga a las leyes generales de la dialéctica.

La objeción anterior asume la hipótesis de que la lógica-matemática solo dispone del concepto que hoy se conoce como de consistencia simple, el cual coincide con la concepción aristotélica de consistencia. Aunque no es lo usual, el modelo hipotético-deductivo puede utilizarse sin modificaciones substanciales tolerando un cierto nivel de contradicción posible, próximo a la contradicción dialéctica, para lo cual es suficiente recurrir al concepto de consistencia absoluta, que tiene mayor generalidad que el de consistencia simple y que puede utilizarse en sistemas lógicos sin operador de negación explícito como los construidos usando el lenguaje de Nicod. Para ello es suficiente definir dentro de un lenguaje L, un sistema S, cuyo conjunto de fórmulas es mayor que el conjunto de sus teoremas. Asimismo, se debe suprimir, dentro de este segundo conjunto, el clásico teorema que afirma que una

contradicción implica a cualquier fórmula. Este expediente sería suficiente para resolver la objeción de origen dialéctico dirigida contra la lógica que usa el modelo hipotético-deductivo. Sin embargo, existe una inexactitud adicional que consiste en dar el mismo estatuto a las contradicciones formales y a las ontológicas. Desde una perspectiva lógica estricta las únicas contradicciones relevantes son las que se producen en el lenguaje, vale decir, las formales. Y ello debido a que con independencia de la concepción de la realidad que poseamos, resulta de necesidad inexcusable describirla de manera consistente o no-contradictoria, pues si dentro de la teoría **T** admitimos como igualmente verdaderas a una proposición **A** y a otra **no-A**, entonces el interlocutor estaría imposibilitado de decidir cuál es el mensaje y no sabría a qué atenerse. Además, mediante la aplicación de reglas lógicas conocidas en la lógica estándar la contradicción producida por **A** y **no-A** genera otras tantas como deseemos, y así tendríamos $\mathbf{B}_1$, y **no-**$\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, y **no-**$\mathbf{B}_2$, y así, sucesivamente, de tal manera que una teoría contradictoria tiene como limitación el imposibilitar la comunicación científica fiable, pues igualmente puede afirmar la existencia de ciertos hechos como negarla. Por lo tanto, la pretensión fundamental del modelo hipotético-deductivo no es afirmar que la naturaleza o la realidad carecen de contradicciones sino que el discurso que las describe debe ser coherente o consistente para posibilitar una comunicación científica fiable. Por lo tanto, en este nivel, las contradicciones relevantes son las formales y son las únicas identificables con la noción de absurdo. Por añadidura, el recurso a un sistema **S**, absolutamente consistente, no se hace con el propósito de introducir la presencia de contradicciones explícitas, sino con el de contar con un sistema de reglas lógicas que asegure que en caso de presentarse inesperadamente una contradicción de cierto tipo, la teoría en cuestión no quedará automáticamente inhabilitada, en tanto que una teoría **T**, absolutamente consistente, se diferencia de una teoría **W**, simplemente consistente, en que la primera no multiplica necesariamente las contradicciones como sí lo hace la segunda.

Sin embargo, no es nuestra intención defender el modelo hipotético-deductivo a ultranza sino solamente poner a prueba su temple frente a la crítica. Ello no es incompatible con reconocer dificultades reales como la suscitada por la historia, como disciplina científica, que difícilmente puede ajustarse a la forma axiomática sin sufrir desnaturalización cognoscitiva. Esto podría devolvernos a la distinción entre ciencias de la naturaleza y ciencias del espíritu, aunque no en los mismos términos que en la época de W. Dilthey. Ello debido a que hay sectores de la psicología, la lingüística y la economía, entre otros, que pueden ser aproximados, en sus formulaciones finales, al modelo hipotético deductivo, el que es más una manera de organizar el conocimiento que de producirlo. De otra parte, la decisión de eliminar a la historia del universo de la ciencia, por definición, no parece adecuada por la dosis de arbitrariedad que entraña. La dificultad, tal vez, radica parcialmente en que la historia tomada con generalidad comporta el estudio de la evolución de la totalidad de lo humano. Distinta es la situación si definimos la tarea en términos más específicos como, por ejemplo, la historia del derecho, o la historia de la organización de la producción, o la historia de la ciencia. Sin embargo, cuando se trata de la historia del Perú, de la de América, o de la historia universal, la situación es más compleja porque necesitamos un conjunto muy grande de criterios de relevancia para seleccionar lo que estimamos más significativo dentro de un ámbito multívoco y de fronteras muy difusas. En dichos contextos la preocupación por buscar leyes cede espacio a la preocupación específica por reconstruir hechos sociales, sus motivaciones e intencionalidades. Y si es verdad que la reconstrucción presupone la vigencia de leyes, estas no tienen que ser históricas sino pueden pertenecer a los diversos dominios de las ciencias particulares como la física, la química, la

biología, la lingüística, la filología, etc. En este nivel, la interpretación como método hermenéutico podría rigorizarse como una decodificación de signos lingüísticos e icónicos regulada por leyes generales. Las dificultades continúan cuando se pretende reconstruir una totalidad tan compleja como la historia universal o la historia de América. En este caso, la tentación a recurrir a entidades metafísicas como el «*Volksgeist*» de Hegel es fuerte y puede llegarse a los extremos del nazismo o de todos los etnocentrismos, cuyo denominador común es el poseer un núcleo irracional basado en sentimientos y no en argumentos. La noción de totalidad, que es muy manejable cuando se la aplica a un organismo o a un sistema de trasmisión y procesamiento de información, se convierte en una noción metafísica cuando se le aplica a grandes grupos sociales bajo el rótulo de «sujeto colectivo» al que se atribuye intencionalidades autónomas en relación con los sujetos concretos. El principio que afirma que el todo es mayor que la suma de las partes y posee propiedades que estas no tienen por separado, puede sujetarse a control observacional en pequeñas dimensiones, pero tiende a asumir caracteres metafísicos cuando se hace extrapolaciones a grandes dimensiones, especialmente en el plano de las ciencias humanas. Es por ello que el holismo histórico es muy atractivo pero casi, inevitablemente, metafísico por atribuir propiedades constatables en totalidades pequeñas a macrototalidades, cuyos límites escapan a definiciones rigurosas y cuyo comportamiento carece de indicadores observables. Los teóricos de los métodos comprensivos y de la empatía (*Einfühlung*) no parecen haber aportado, en su favor, nada más preciso que la recomendación de comprender, cada elemento, dentro del sentido de la totalidad y comprender, la totalidad, en su soporte constituido por sus elementos.

Dadas las dificultades antes anotadas, la posibilidad más inmediata de rigorizar los estudios históricos es desarrollarlos regionalmente a través de la arqueología, etnografía, historia económica, filología, paleontología, etc. Este proceder no conducirá a la instauración de sistemas hipotético-deductivos pero sí a reconstrucciones cuya mayor o menor exactitud puede ser constatada con los hechos. Por ahora, el planteamiento de la historia como ciencia global general suscita tantas dificultades como las que, presumiblemente, surgirían si se pretendiese una ciencia natural global. La diferencia la ha aportado el hecho de que ningún científico natural ha postulado la necesidad de una ciencia natural global sino regional, como la física, la química, la microbiología, etc. Y esta decisión es un factor, no desdeñable, que ha posibilitado mejores niveles de precisión y rigorización a las diversas ramas de las ciencias naturales en relación con las ciencias sociales. El otro factor que explicaría la debilidad generalizada de las ciencias sociales es que en este caso tanto el sujeto cognoscente como el objeto de estudio coinciden en el hombre, lo que facilita que los intereses sociales en pugna, expresados a través de ideología, perturben la objetividad del conocimiento y, en muchos casos, lo desnaturalicen.

Con consciencia de sus limitaciones, puede sostenerse que el uso flexible del modelo hipotético-deductivo puede cumplir adicionalmente, con ventaja sobre otras opciones, la función pragmática de viabilizar la comunicación entre investigadores, en circunstancias en que la superespecialización nos mantiene ante el riesgo de dejar decisiones fundamentales a los que Ortega y Gasset llamó «sabios ignorantes». Este puede ser, por ahora, el medio de no perder la percepción de la totalidad sin debilitar exageradamente por ello el rigor lógico y observacional, evitando así caer en la instauración de objetos metafísicos, que nos remitan a entidades que no son objetos de nuestro conocimiento sino sub-productos creados por disfunciones de nuestra actividad cognoscitiva.

En los años 60 del siglo XX se hizo notorio en la Filosofía Epistemológica un redimensionamiento de sus proyectos originales. Así, por ejemplo, el proyecto de la *Enciclopedia para la ciencia unificada* que fue formulado por el Círculo de Viena en su manifiesto titulado *Concepción Científica del Mundo* fue dejado de lado en un contexto en el que la matemática probabilística sustituyó al lenguaje de las certidumbres newtonianas y la antropología cultural, la lingüística y otras ciencias sociales adquirieron carta de ciudadanía pese a su distancia del método experimental. Al esfuerzo por unificar la ciencia se lo calificó como el componente nuclear del conjunto de tesis filosóficas publicadas por los empiristas lógicos entre los años 20 y 30, las cuales que fueron denominadas por sus críticos la «concepción recibida» de los neopositivistas «fisicalistas» que se propusieron la reconstrucción racional del conocimiento, con el objetivo de lograr su reorganización lógica, inspirados en el método axiomático utilizado por Aristóteles, Euclides, Newton, Spinoza, Peano y Einstein, entre otros. De esta manera se pensó que la gran debilidad de los neopositivistas fue intentar sostener y fortalecer el racionalismo moderno dotando al conocimiento de fundamentos indiscutibles y convincentes como los que buscaron infructuosamente Descartes a través de la duda metódica y Kant a través de los juicios sintéticos a priori.

Paralelamente, la concepción lógica del lenguaje y del mundo expuesta en el *Tratactus Logico Philosophicus* de Wittgenstein tendió a ser percibida como desactualizada con la carga adicional de que su propio autor la sometió a duras críticas y propuso la tesis de los *language games* que minimizó los temas sintáctico-semánticos y enfatizó los pragmáticos y prescriptivos. De este modo el lenguaje natural, cotidiano u ordinario desplazó al lenguaje científico de las preocupaciones de numerosos filósofos ingleses y, posteriormente, de las de un sector importante de los filósofos norteamericanos y alemanes. De manera análoga, los proyectos encaminados a construir una lógica de la investigación científica pasaron a un segundo plano, tanto los inscritos en la perspectiva inductivista, representados por Reichenbach y Carnap, como los desarrollados dentro de la perspectiva no inductivista liderada por Popper.

La preocupación por el análisis del cambio científico, la sustitución y elección de teorías, la denominada subdeterminación de teorías por los hechos, así como la distinción entre ciencia y seudociencia dejaron un espacio mínimo a los esfuerzos de Hempel, entre otros, por establecer una teoría y una metodología de la confirmación o de la corroboración de las hipótesis científicas. La difusión progresiva de los resultados de la mecánica cuántica a través de la divulgación del principio de indeterminación de Heisenberg y de las tesis de la Escuela de Copenhague contribuyeron significativamente al debilitamiento del uso del concepto de verdad en la ciencia pese a que el aporte de Tarski había creado condiciones de claridad teórica y lógica para usarlo rigurosamente en la lógica y en la matemática. Sin embargo, las seguridades proporcionadas por la concepción semántica de Tarski quedaban al margen de la discusión ante el hecho concluyente de que eran aplicables directamente a los lenguajes formales de la lógica y de la matemática, restricción que dificultaba seriamente aplicar la denominada convención T de Tarski a otras ciencias cuyas proposiciones se expresan en lenguaje social y reclaman tener en unos casos contenido factual y en otros contenido fenoménico, ligados en lo principal a la capacidad de predecir exitosamente observaciones y no necesariamente de describir fidedignamente la denominada realidad.

El pragmatismo de Quine a través de su conocido artículo «Dos dogmas del empirismo» reclamó haber refutado de manera definitiva la distinción kantiana entre juicios sintéticos y juicios analíticos que este autor hizo extensiva, sin mayores provisos, a los neopositivistas. Pese a su notable autoridad como especialista en lógica, no concedió importancia al hecho diferencial de que el concepto de afirmación analítica en Kant era estrictamente semántico mientras que en primer Wittgenstein y en los neopositivistas fue estrictamente sintáctico y estructural, razón por la que lo identificaron con el concepto extensional de tautología. De esta manera se entiende que en la concepción kantiana del juicio analítico, este se encuentra constituido por un predicado que se limita a ser explicativo del contenido semántico del sujeto mientras que, para los neopositivistas, careció de sentido hablar del poder explicativo de un enunciado analítico, entendido como tautología, porque, simplemente, esta era semánticamente vacía o puramente estructural.

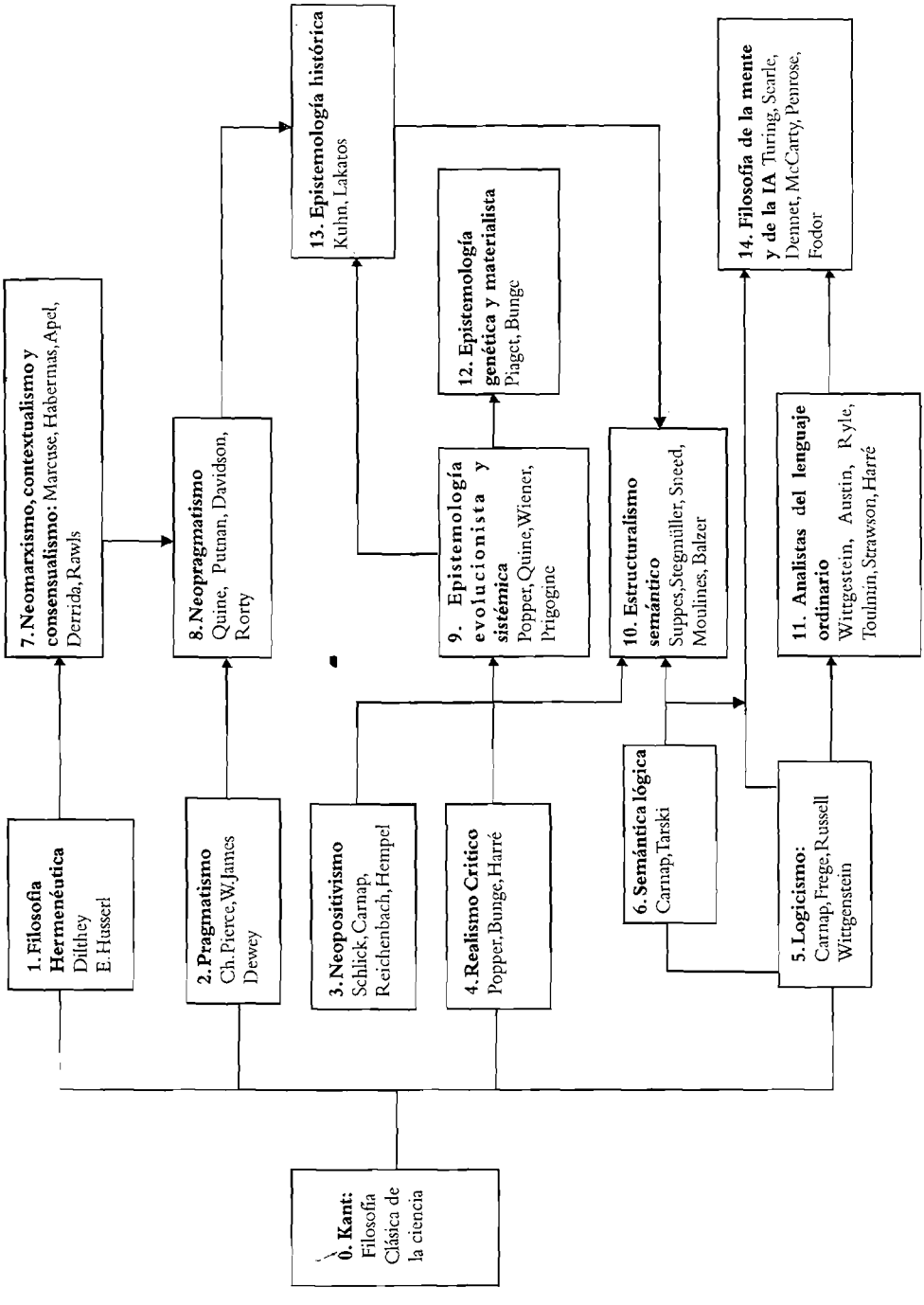
Tanto los discípulos de Quine como sus simpatizantes interpretaron apresuradamente que los argumentos de *Dos dogmas del empirismo* habían asestado una estocada definitiva a la distinción entre ciencias formales y ciencias factuales introducida por la «Concepción recibida» y concedieron, sin reparar en la inconsistencia de la argumentación de su maestro, que los denominados problemas –derivados de las tesis de Quine de la inescrutabilidad de la referencia, indeterminación de la traducción y subdeterminación de las teorías por la evidencia empírica– constituían obstáculos genuinos para hablar con fundamento de verdades científicas, surgiendo de esta manera las llamadas posiciones deflacionistas que se propusieron sustituir la definición aristotélica del concepto de verdad, rescatada por Tarski, por la aceptación consensual de las teorías en base al éxito predictivo y a la utilidad. De esta suerte, lo que se soslaya en el entorno quineano, hasta la fecha, es que si las tesis de «Dos dogmas...» antes mencionadas fueran válidas, toda argumentación fundada en reemplazos por sinonimia, como la conocida 'soltero' = 'no casado', carecería totalmente de fuerza probatoria, inclusive para cuestionar la tradicional analiticidad de cepa kantiana.

Lo antes expuesto explica la reactualización del pragmatismo de Charles S. Peirce y la difusión del denominado pensamiento posmoderno en Francia, Alemania y Estados Unidos de Norteamérica con el refuerzo de la epistemología histórica de Thomas Kuhn. Este pensador acuñó el concepto de paradigma de ciencia normal para describir y explicar el comportamiento social de las comunidades científicas y el carácter eminentemente cultural de las teorías científicas, de las metodologías y de los conceptos que se utilizan para evaluarlas. En este contexto surge, con las repercusiones del existencialismo heideggeriano y del neomarxismo de Francfort, una concepción posmoderna de la ciencia que la concibe como un intento frustrado de objetividad y seguridad de la denominada razón instrumental cartesiana y la trata como un relato que solo se distingue de la *Caperucita roja,* del *Popol vuh* o del *Mito de Prometeo* en que es una construcción simbólica más exitosa y eficiente para las necesidades de la sociedad tecnocientífica sostenedora del «mito del progreso». La debilidad principal de estas tendencias, de cierto éxito literario, radica en que no distinguen entre fundamento y consenso; entre ciencia teórica y tecnología; entre comunidades de investigadores y redes teóricas; entre verdad, validez y eficiencia; entre lógica de las teorías y los intereses sociales de los investigadores, etc. Con la sombrilla de un holismo contextualista que parece buscar más el impacto que la exactitud e invocando una supuesta nueva epistemología se confunde objetos lingüísticos con objetos reales; propiedades de las teorías, de las metodologías y de los lenguajes científicos con propiedades de los hechos y de los procesos naturales y sociales.

El escenario antes descrito muestra un distanciamiento muy severo entre un sector importante de la actividad filosófica que elabora discursos sobre la ciencia y lo que las comunidades científicas realmente hacen. Este divorcio no existió en los orígenes de la epistemología si consideramos que la mayor parte de los miembros del Círculo de Viena eran físicos, matemáticos o científicos sociales de prestigio. Uno de ellos, Kurt Gödel ha sido probablemente el matemático más famoso del siglo XX. Y el animador de este grupo, Moritz Schlick, realizó tanto investigaciones físicas sobre la teoría de la relatividad de Albert Einstein como sobre la filosofía clásica. Inclusive, uno de los más duros críticos del neopositivismo, Karl Popper, fortaleció su acercamiento a la comunidad científica a través de sus vínculos con Albert Einstein, Eccles, Von Hayek, todos ellos merecedores del premio Nobel en Física, Medicina y Economía, respectivamente. Los programas de investigación que alentara este acercamiento, como los referentes a la unificación de teorías (es el caso inicial de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead) continúan siendo retos para la investigación científica. Un ejemplo vigente lo constituye el proyecto de unificación de la mecánica cuántica y la teoría general de la relatividad a través de lo que Einstein propuso como teoría de campo unificado. Los problemas de inducción continúan abiertos en el ámbito de las ciencias fácticas. Y las propuestas de Reichenbach y Carnap han contribuido a abrir nuevos horizontes que han conducido al crecimiento y diversificación de la lógica matemática. También han posibilitado concreciones tecnológicas en los campos de la inteligencia artificial, sistemas expertos y robótica.

Evidentemente, lo anteriormente descrito no sería posible si no existieran grupos importantes de académicos que hacen epistemología académica en estrecha relación con las comunidades científicas y con un nivel de formación que posibilita comunicación válida con ellas. En estos sectores se encuentran los epistemólogos de la corriente estructuralista, de la tendencia que cultiva la filosofía de la mente y la inteligencia artificial, la epistemología evolucionista, la epistemología genética, la epistemología de la física, de la matemática y de la lógica, incluyendo sus temas ontológicos. Sobre lo último, la lógica matemática desarrollada en Brasil (Da Costa y Krause) ha continuado demostrando la fecundidad de los sistemas no-clásicos, como herramientas de análisis, construyendo teorías sobre cuasi-conjuntos y teorías aplicables a dominios con elementos indiscernibles como los de la física de Schroedinger. Esto significa que el panorama de la filosofía de la ciencia rigurosa a comienzos del siglo XXI es bastante más segmentado y diversificado que el de la primera mitad del siglo XX, razón por la que puede ser de utilidad un esquema gráfico que ayude a orientarse en el nuevo escenario configurado por las tendencias vigentes. Por ello, como último componente de este artículo añadimos un diagrama que usado con flexibilidad puede ser de utilidad para identificar las grandes orientaciones que eran distinguibles a principios del siglo XX y hacer un seguimiento del proceso que ha conducido a las tendencias visibles a comienzos del siglo XXI. Una limitación aparente de la clasificación que proponemos podría ser sugerida por el hecho de que un mismo autor aparece en más de un recuadro. La explicación razonable para ello está dada por el hecho constituido por la evolución del pensamiento filosófico de los más distinguidos miembros de la comunidad académica internacional.

Panorama de la epistemología contemporánea



Las tres tareas de la epistemología[1]

Toda teoría del conocimiento debe partir del conocimiento como un hecho sociológico dado. El sistema de conocimiento como ha sido construido por generaciones de pensadores, los métodos usados para adquirir conocimientos en los primeros tiempos o en nuestros días, los fines del conocimiento tal como son expresados por el proceder de la investigación científica, el lenguaje en el cual el conocimiento es formulado; todo ello nos es dado de la misma forma que otros hechos sociológicos, tales como las costumbres sociales, los hábitos religiosos, o las instituciones políticas.

La base aprovechable por el filósofo no difiere de la del sociólogo o del psicólogo; esto se sigue del hecho de que si el conocimiento no estuviera incorporado en libros, discursos y acciones humanas, nosotros nunca sabríamos de él. El conocimiento, en consecuencia, es una cosa muy concreta y el examen de sus propiedades conlleva el estudio de las características de un fenómeno sociológico.

Denominaremos a la primera tarea de la epistemología 'tarea descriptiva', que consiste en dar una descripción del conocimiento como es realmente. Se sigue luego que la epistemología en este aspecto forma parte de la sociología. Pero es solamente un grupo especial de cuestiones referentes al fenómeno sociológico *conocimiento* el que constituye el dominio de la epistemología. Hay cuestiones tales como ¿cuál es la significación de los conceptos usados en el conocimiento?, ¿cuáles son los presupuestos contenidos en el método científico?, ¿cómo sabemos si un enunciado es verdadero y si lo sabemos absolutamente? y muchas otras; y aunque en verdad estas cuestiones conciernen al fenómeno sociológico *ciencia,* ellas son de un tipo muy especial comparadas con la forma de aquellas que se plantean en la sociología general.

¿Qué genera esta diferencia? Usualmente se dice que es una diferencia de las relaciones internas y externas entre aquellas expresiones humanas que tomadas como un todo son denominadas *conocimiento.* Las relaciones internas son de tal naturaleza que pertenecen al contenido del conocimiento. La epistemología en consecuencia, está interesada solamente en las relaciones internas mientras que la sociología, aunque puede tomar en cuenta parcialmente las relaciones internas, siempre combina estas con las relaciones externas en las que esta ciencia se encuentra también interesada. Un sociólogo, por ejemplo, puede informar que los astrónomos construyen grandes observatorios con telescopios para observar las estrellas y de esta suerte la relación interna entre los telescopios y las estrellas entra dentro de la descripción sociológica.

1 Tomado de Reichenbach, Hans (1938) *Experience and Prediction.* Chicago, The University of Chicago Press, pp. 3-16. Traducción de Luis Piscoya Hermoza.

El informe sobre astronomía contemporánea iniciado con la afirmación precedente puede ser continuado por el enunciado que afirma que frecuentemente los astrónomos son hombres aficionados a la música o que ellos en general pertenecen a la clase burguesa de la sociedad; si estas relaciones no interesan a la epistemología es porque ellas no entran dentro del contenido de la ciencia; ellas son lo que llamamos relaciones externas.

Aunque esta distinción no proporciona una línea clara de demarcación podemos usarla como una primera indicación del diseño de nuestra investigación. Podemos decir entonces que a la tarea descriptiva de la epistemología le concierne la estructura interna del conocimiento y no las características externas que interesan a un observador que no toma en cuenta el contenido.

Debemos añadir ahora una segunda distinción la cual importa a la psicología. La estructura interna del conocimiento es el sistema de conexiones que se producen en el pensamiento. Desde semejante definición podemos estar tentados a inferir que la epistemología proporciona una descripción del proceso del pensamiento, pero esto sería completamente erróneo. Hay una gran diferencia entre el sistema de interconexiones lógicas del pensamiento y la manera real en la que se realizan los procesos de pensamiento. Las operaciones psicológicas del pensamiento son más bien procesos vagos y fluctuantes; ellas casi nunca se ajustan a las reglas prescritas por la lógica y pueden, inclusive, omitir grupos enteros de operaciones, las que serían necesarias para una exposición completa de la materia en cuestión. Esto es válido tanto para el pensamiento cotidiano como para los procesos mentales del hombre de ciencia que confronta la tarea de encontrar interconexiones lógicas entre ideas divergentes acerca de nuevos hechos observados; el genio científico nunca se ha sentido constreñido por los rígidos pasos y las vías prescritas por el razonamiento lógico. Será, en consecuencia, un intento vano tratar de construir una teoría del conocimiento que sea al mismo tiempo lógicamente completa y que guarde estricta correspondencia con los procesos psicológicos del pensamiento.

La única manera de escapar de esta dificultad es diferenciar cuidadosamente la tarea de la epistemología de la tarea de la psicología. La epistemología no considera los procesos de pensamiento en su devenir efectivo, esta tarea es dejada enteramente a la psicología. Lo que la epistemología intenta es construir procesos de pensamiento de tal modo que ellos deberían producirse así si fueran ordenados en un sistema consistente, o construir conjuntos de operaciones justificables que pueden ser intercaladas entre el punto de partida y el resultado del proceso de pensamiento, reemplazando los eslabones intermedios reales. La epistemología considera así un substituto lógico más que el proceso real. Para este substituto lógico hemos introducido el término 'reconstrucción racional'[2]; el cual parece apropiado para indicar la tarea de la epistemología. Muchas falsas objeciones y malas comprensiones de la moderna epistemología tienen su origen en no haber separado estas dos tareas; en consecuencia, en ningún caso será objeción atendible a una tesis epistemológica que el pensamiento real no se ajuste a ella.

A pesar de realizarse como una construcción ficticia, nosotros debemos retener la noción de tarea descriptiva de la epistemología. La construcción que va a ser lograda no es arbitraria; está ligada al pensamiento real por el postulado de correspondencia. Es aún, en cierto

2 El término *rationale Nachkonstruktion* fue usado por Carnap en *Der logische Aufbau der Welt* (Berlín y Leipzig. 1928).

sentido, una modalidad de pensamiento mejor que el pensamiento real. Teniendo a la vista la reconstrucción racional, sentimos la sensación de que solamente ahora comprendemos lo que pensamos y admitimos que ella expresa lo que nos proponemos, hablando en sentido estricto. Es un hecho psicológico remarcable que exista tal avance hacia la comprensión de nuestros propios pensamientos, el mismo hecho que constituyó la base de la mayéutica de Sócrates y que ha permanecido desde aquel tiempo como la base del método filosófico; su adecuada expresión científica es el principio de reconstrucción racional.

Si se solicita una más conveniente determinación de este concepto de reconstrucción racional, nosotros podemos decir que corresponde a la forma en la cual los procesos de pensamiento son comunicados a otras personas en lugar de la forma en la que ellos son subjetivamente elaborados. Por ejemplo, la forma en que un matemático publica una nueva demostración o un físico su razonamiento lógico para la fundamentación de una nueva teoría, casi corresponde a nuestro concepto de reconstrucción racional, y la bien conocida diferencia entre el modo como el pensador descubre un teorema y el modo como lo presenta a un auditorio puede ilustrar la diferencia en cuestión. Introduciré los términos contexto del descubrimiento y contexto de la justificación para señalar esta distinción. En consecuencia, tenemos que decir que la epistemología está abocada a la construcción del contexto de la justificación. Pero inclusive la forma de presentación de las teorías científicas es solo una aproximación a lo que nosotros significamos con el contexto de la justificación. Aun la forma escrita de las exposiciones científicas no siempre satisface las exigencias de la lógica o neutraliza los resabios de la motivación subjetiva de la cual tales teorías surgieron. Si la presentación de cualquier teoría es sometida a un riguroso examen epistemológico, el veredicto resulta todavía más desfavorable. Pues el lenguaje científico, estando destinado como el lenguaje de la vida diaria a propósitos prácticos, contiene tantas abreviaciones e inexactitudes toleradas silenciosamente, que un lógico nunca estará plenamente satisfecho con la forma de las publicaciones científicas. Nuestra comparación, sin embargo, puede al menos indicar el modo en que queremos que el pensamiento sea reemplazado por operaciones justificables; y puede también mostrar que la reconstrucción racional del conocimiento pertenece a la tarea descriptiva de la epistemología. Esta se encuentra ligada al hecho del conocimiento de la misma manera que la exposición de una teoría está ligada a los procesos de pensamiento de su autor.

En adición a su tarea descriptiva, a la epistemología le concierne otra finalidad a la que puede llamarse su tarea crítica. El sistema del conocimiento es criticado; es juzgado con respecto a su validez y confiabilidad. Esta tarea es ya parcialmente efectuada en la reconstrucción racional, pues el conjunto ficticio de operaciones que ocurren aquí es elegido desde el punto de vista de la justificabilidad; nosotros reemplazamos el pensamiento real por operaciones en tanto que son justificables, esto es, que pueden ser demostradas como válidas. Pero la tendencia a preservar la correspondencia con el pensamiento real debe ser separada de la tendencia a obtener un pensamiento válido; y así nosotros tenemos que distinguir entre la tarea descriptiva y la crítica. Ambas colaboran con la reconstrucción racional. Puede suceder que la descripción del conocimiento conduzca al resultado de que ciertas cadenas de pensamientos u operaciones no pueden ser justificadas; en otras palabras, que aun la reconstrucción racional contiene cadenas no justificables o que no es posible intercalar una cadena justificable entre el punto de partida y el resultado del pensamiento real. Este caso muestra que la tarea descriptiva y la tarea crítica son diferentes, aunque descripción

en este sentido no es una copia del pensamiento real sino la construcción de su equivalente el cual está ligado al primero por el postulado de correspondencia y permite someter el conocimiento a crítica.

La tarea crítica es la que llamamos frecuentemente 'análisis de la ciencia', y como el término *lógica* no expresa nada más, al menos si lo tomamos en un sentido acorde con su uso, podemos hablar aquí de lógica de la ciencia. Los problemas de la lógica más conocidos pertenecen a este dominio; la teoría del silogismo fue construida para justificar el pensamiento deductivo reduciéndolo a ciertos esquemas demostrativos de operaciones, y la moderna teoría del carácter tautológico de las fórmulas lógicas debe ser interpretada como una justificación del pensamiento deductivo concebido en una forma más general. La cuestión de la síntesis a priori que ha jugado un rol tan importante en la historia de la filosofía, también cae dentro de este marco; y de la misma manera el problema del razonamiento inductivo del que ha surgido más de una *«investigación concerniente al entendimiento humano»*. El análisis de la ciencia comprende todos los problemas básicos de la epistemología tradicional; por tanto está considerado en primer plano cuando hablamos de epistemología.

Las investigaciones de nuestro libro pertenecerán, en su mayor parte, al mismo dominio. Antes de entrar en ellas, sin embargo, nosotros podemos mencionar un resultado de carácter más general, que ha sido proporcionado por las investigaciones previas de esta clase, un resultado concerniente a una distinción sin la cual el proceso del conocimiento científico no puede ser comprendido. El método científico no es, en cada paso de su proceder, dirigido por el principio de validez, hay otros pasos que tiene el carácter de decisiones volitivas. Esta es la distinción que debemos enfatizar en el mismo principio de las investigaciones epistemológicas. Que la idea de verdad o validez tiene una influencia directiva en el pensamiento científico es obvio y ha sido notado en todos los tiempos por los epistemólogos. Que hay ciertos elementos del conocimiento, sin embargo, que no son gobernados por la idea de verdad pero que están sujetos a decisiones volitivas, y aunque influyendo poderosamente en la construcción de todo el sistema del conocimiento no afectan su carácter de verdad, es menos conocido por los investigadores en filosofía. La presentación de las decisiones volitivas contenidas en el sistema del conocimiento constituye por tanto, una parte que integra la tarea crítica de la epistemología. Para dar un ejemplo de las decisiones volitivas nosotros podemos señalar las llamadas convenciones, por ejemplo, la convención concerniente a la unidad de medida de longitud y al sistema decimal, etc. Pero no todas las convenciones son tan obvias y es a veces un problema más bien difícil encontrar los indicios que revelen convenciones. El progreso de la epistemología ha sido frecuentemente complementado por el descubrimiento del carácter convencional de ciertos elementos tomados hasta entonces, como si tuvieran el carácter de ser decidibles como verdaderos o falsos; el descubrimiento de Helmholtz de la arbitrariedad de la definición de congruencia espacial, el descubrimiento de Einstein de la relatividad de la simultaneidad, significan el reconocimiento de que lo que fue considerado un enunciado debe ser reemplazado por una decisión. Encontrar todos los puntos en los cuales hay decisiones implícitas es una de las más importantes tareas de la epistemología.

Las convenciones constituyen una clase especial de decisiones; ellas representan una elección entre concepciones equivalentes. Los diferentes sistemas de pesos y medidas son un buen ejemplo de tal equivalencia; ellos ilustran el hecho de que la decisión en favor de

cierta convención no influye en el contenido del conocimiento. Los ejemplos elegidos de la teoría del espacio y del tiempo previamente mencionados son igualmente ubicables entre las convenciones. Hay decisiones de otro carácter que no conducen a concepciones equivalentes sino a sistemas divergentes; ellas pueden ser llamadas bifurcaciones volitivas. Mientras una convención puede ser comparada a una elección entre diferentes vías que conducen al mismo lugar, la bifurcación volitiva se asemeja a una bifurcación de vías que nunca se juntarán de nuevo. Hay bifurcaciones volitivas de importancia que se encuentran en la misma entrada de la ciencia; estas son decisiones concernientes a los fines de la ciencia ¿Cuál es el propósito de la investigación científica? Esta es, lógicamente hablando, una cuestión que no es de carácter veritativo sino una decisión volitiva y la decisión específica que dará respuesta a esta cuestión pertenece al tipo de las bifurcaciones volitivas. Si alguien nos dice que estudia ciencia por placer y para llenar sus horas de ocio, nosotros no podemos esgrimir como objeción que este razonamiento es «un enunciado falso» —no es un enunciado en absoluto sino una decisión y todos tienen derecho a hacer lo que quieran; nosotros podemos objetar que tal determinación es opuesta al uso normal de las palabras y que lo que él llama el fin de la ciencia es generalmente llamado el fin del juego— este sí sería un enunciado verdadero. Este enunciado pertenece a la parte descriptiva de la epistemología; nosotros podemos mostrar que en libros y discursos la palabra *ciencia* está siempre conectada con el «descubrimiento de la verdad» y a veces también con la «predicción del futuro». Pero, lógicamente hablando, este es un asunto de decisiones volitivas. Es obvio que esta decisión no es una convención porque las dos concepciones obtenidas, a través de diferentes postulaciones concernientes a los fines de la ciencia, no son equivalentes; se trata de una bifurcación.

O tomemos una cuestión como la referente al significado de cierto concepto. Digamos causalidad, o verdad, o el significado mismo. Lógicamente hablando esta es una cuestión sobre una decisión concerniente a la delimitación de un concepto, aunque, por supuesto, la práctica científica ha decidido ya acerca de esta delimitación de una manera más bien precisa. En tal caso debe examinarse cuidadosamente si la decisión en cuestión es una convención o una bifurcación. La delimitación de un concepto puede ser de carácter convencional, por ejemplo, diferentes delimitaciones pueden conducir a sistemas equivalentes.

El carácter de ser verdadero o falso pertenece solamente a los enunciados, no a las decisiones. Nosotros podemos, sin embargo, coordinar con una decisión ciertos enunciados concernientes a ella; y, antes que todo, hay dos tipos de enunciados que deben ser considerados. El primero es un enunciado del tipo que ya hemos mencionado: establece qué decisión usa la ciencia en la práctica. Pertenece a la epistemología descriptiva y es, por tanto, de carácter sociológico. Nosotros podemos decir que este enunciado establece un *hecho objetivo*, un hecho perteneciente a la esfera de los objetos del conocimiento[3]. Un hecho sociológico es de este tipo. Es, por supuesto, del mismo tipo de hechos con los que trata la ciencia natural. Al segundo enunciado le concierne el hecho de que, lógicamente hablando, hay una decisión y no un enunciado; un hecho de esta clase puede ser llamado un *hecho lógico*. No hay *contradicción* en hablar aquí de un hecho refiriéndonos a una decisión. Aunque una decisión no es un hecho objetivo, su carácter de ser una decisión usada por la ciencia es un hecho y puede ser expresado por un enunciado.

3 El término «hecho objetivo» tomado en el sentido original de la palabra «objetivo» expresaría el mismo significado; sin embargo nosotros evitamos esta última en la medida que la palabra «objetivo» sugiere una oposición a «subjetivo», una oposición que nosotros no pretendemos.

Aquello resulta obvio por el carácter cognoscitivo de tal enunciado; el enunciado puede ser correcto o errado y en algunos casos el enunciado errado ha sido sostenido por centurias mientras que el enunciado correcto ha sido descubierto sólo recientemente. Los ejemplos dados por las teorías de Helmholtz y Einstein sobre el espacio y el tiempo pueden ser ilustrativos. Pero un hecho de la clase aquí considerada no pertenece a la esfera de los objetos de la ciencia y lo llamamos hecho lógico. Será una de nuestras tareas analizar estos hechos lógicos y determinar su *status* lógico; pero por ahora usaremos el término «hecho lógico» sin mayor explicación.

La diferencia entre enunciados y decisiones marca un punto en el cual la distinción entre la tarea descriptiva y la tarea crítica de la epistemología cobra máxima importancia. El análisis lógico nos muestra que dentro del sistema de la ciencia hay ciertos puntos sobre los cuales no puede plantearse ninguna cuestión relacionada con la verdad pero donde puede asumirse una decisión; la epistemología descriptiva nos dice qué decisión está realmente en uso. Muchas malas comprensiones y falsas pretensiones de la epistemología tienen su origen aquí. Nosotros conocemos las pretensiones del kantismo y del neokantismo de mantener a la geometría euclidiana como la única base posible de la física. La moderna epistemología ha mostrado que el problema tal como es formulado dentro del kantismo está mal planteado, desde que supone una decisión que Kant no vio. Nosotros conocemos las controversias acerca del «significado del significado»; su carácter apasionado se debe a la convicción de que hay un significado absoluto del significado que debemos descubrir, mientras que la cuestión puede ser discutida solamente con respecto al concepto de significado correspondiente al uso de la ciencia o presupuesto en ciertas conexiones. Pero nosotros no queremos anticipar la discusión de este problema y nuestro ulterior tratamiento de él contendrá una más detallada explicación de nuestra distinción entre enunciados y decisiones.

El concepto de decisión conduce a la tercera tarea que nosotros debemos encomendar a la epistemología. Hay muchas situaciones en las que las decisiones de la ciencia no pueden ser determinadas precisamente, porque las palabras o métodos usados son demasiados vagos; y hay otras en las que dos o aún más decisiones diferentes están en uso, entremezcladas e interfiriéndose dentro del mismo contexto confundiendo las investigaciones lógicas. El concepto de significado puede servir como ejemplo; algunos ejemplos más simples se presentan en la teoría de la medida. El trabajo concreto de la investigación científica puede poner de lado las exigencias del análisis lógico, el hombre de ciencia no siempre tiene en cuenta las demandas del filósofo. Sucede, por tanto, que las decisiones presupuestadas por la ciencia positiva no son aclaradas. En tal caso, será tarea de la epistemología sugerir una propuesta en relación con la decisión y nosotros hablaremos, por tanto, de la tarea de orientación de la epistemología como su tercera tarea. Esta función de la epistemología puede resultar de un gran valor práctico, pero debe pensarse con claridad que lo que se proporciona aquí es una propuesta y no una determinación de carácter veritativo. Nosotros podemos señalar las ventajas de la decisión propuesta y podemos usarla en nuestras propias exposiciones de las materias relativas al caso, pero nunca podemos reclamar acuerdo con nuestra propuesta en el mismo sentido en que lo reclamamos para enunciados cuya verdad hemos probado.

Hay sin embargo, una cuestión concerniente a hechos que debe ser considerada en conexión con la propuesta de una decisión. El sistema del conocimiento está interconectado de tal manera que algunas decisiones están ligadas entre sí; una decisión incluye otras y,

aunque somos libres para elegir la primera, no somos libres respecto de aquellas que la siguen. Llamaremos al grupo de decisiones ligadas por una decisión, sus decisiones implicadas. Daremos un ejemplo: la decisión por el sistema inglés de medidas conduce a la imposibilidad de añadir números de medida de acuerdo a las reglas técnicas del sistema decimal; así la renuncia a estas reglas será una decisión implicada. O un ejemplo complicado: la decisión expresada en la aceptación de la geometría euclidiana en física puede conducir a la aceptación de la ocurrencia de extrañas fuerzas, de «fuerzas universales», que distorsionan todos los cuerpos en la misma magnitud y puede conducir aún a mayores inconvenientes concernientes al carácter continuo de la causalidad. El descubrimiento de interconexiones de esta clase es una importante tarea de la epistemología; las relaciones entre diferentes decisiones son frecuentemente oscurecidas por la complejidad de la materia; es solamente añadiendo el grupo de decisiones implicadas que una propuesta respecto a una nueva decisión resulta completa.

El descubrimiento de las decisiones implicadas pertenece a la tarea crítica de la epistemología y las relaciones entre decisiones pertenecen a la clase de los hechos lógicos. Nosotros podemos, por tanto, reducir la tarea de orientación de la epistemología a la tarea crítica usando el siguiente procedimiento sistemático: nosotros renunciamos a hacer propuestas y en lugar de eso construimos una lista de todas las decisiones posibles, cada una acompañada de sus decisiones implicadas. Así dejamos elegir a nuestro lector después de mostrarle todas las conexiones factuales a los cuales él está ligado. Son una especie de hitos de señales lógicas que nosotros erigimos. Para cada camino damos su dirección junto con todas las direcciones conexas y dejamos la elección de la ruta a cargo del caminante que viaja a través de la selva del conocimiento. Tal vez el viajero estará más agradecido por tales postes que si fuera, mediante una recomendación sugerente, directamente encaminado hacia cierta senda. Dentro del marco de la moderna filosofía de la ciencia hay un movimiento que lleva el nombre de convencionalismo; este trata de mostrar que la mayor parte de las cuestiones epistemológicas no son de carácter veritativo sino que pueden ser explicadas por decisiones arbitrarias.

Esta tendencia, ante todo, con su fundador Poincaré, tiene méritos históricos como el haber conducido a la filosofía a poner énfasis en los elementos volitivos del sistema del conocimiento, los cuales habían sido negados antes. En su posterior desarrollo, sin embargo, ha traspasado grandemente sus límites por haber exagerado la parte ocupada por las decisiones en el conocimiento. Las relaciones entre las diferentes decisiones fueron soslayadas y la tarea de reducir la arbitrariedad a un mínimo por medio de la mostración de las interconexiones lógicas entre las decisiones arbitrarias fue olvidada. El concepto de decisiones implicadas, por tanto, puede ser considerado como un dique contra el convencionalismo extremo: él nos permite separar la parte arbitraria del sistema del conocimiento de su contenido sustancial, discriminar entre la parte objetiva y la subjetiva de la ciencia. Las relaciones entre las decisiones no dependen de nuestra elección sino son prescritas por las reglas de la lógica o por las leyes de la naturaleza.

Aún más, resulta que la exposición de las decisiones implicadas decide muchas discusiones acerca de la elección de decisiones. Hay decisiones básicas que gozan de una aceptación casi universal y si nosotros tenemos éxito en mostrar que una de las decisiones en disputa está implicada por cierta decisión básica, la aceptación de dicha decisión estará asegurada.

Decisiones básicas de este tipo, son, por ejemplo, el principio de que las cosas de la misma clase recibirán los mismos nombres, o el principio de que la ciencia proporciona métodos para predecir el futuro tan exactamente como sea posible (una demanda que será aceptada aun reconociendo que la ciencia es encargada de otras tareas). No diré que estas decisiones básicas deben ser asumidas y retenidas en todo el desarrollo de la ciencia; lo que quiero expresar es solamente que estas decisiones son realmente sostenidas por la mayor parte de la gente y que muchas controversias acerca de decisiones se originan solamente en no ver la implicación que conduce desde las decisiones básicas a la decisión en discusión.

La parte objetiva del conocimiento, sin embargo, debe ser liberada de los elementos volitivos por el método de reducción, transformando la tarea de orientación de la epistemología en la tarea crítica. Nosotros podemos establecer la conexión en la forma de una implicación. Si Ud., elige esta decisión entonces está obligado a aceptar este enunciado o esta otra decisión. Esta implicación, tomada como un todo, está libre de elementos volitivos; ella es la forma en la cual la parte objetiva del conocimiento encuentra expresión.

La epistemología genética[4]

La epistemología genética intenta explicar el conocimiento y en particular el conocimiento científico sobre la base de su historia, su sociogénesis y especialmente desde los orígenes psicológicos de las nociones y operaciones sobre las cuales está fundamentado. Estas nociones y operaciones son extraídas en gran parte del sentido común; de tal manera que sus orígenes pueden echar luz sobre su significación como conocimiento de un nivel algo más elevado. Pero la epistemología genética también toma en consideración, en tanto que es posible, la formalización y en particular, las formalizaciones lógicas aplicadas a estructuras estables de pensamiento, y en ciertos casos a las transformaciones de un nivel a otro en el desarrollo del pensamiento.

La descripción que he dado de la naturaleza de la epistemología genética conduce a un problema principal, a saber, el punto de vista filosófico tradicional de la epistemología. Para muchos filósofos y epistemólogos, la epistemología es el estudio del conocimiento como existe en el momento presente, es el análisis del conocimiento por el conocimiento y dentro de su propia trama sin considerar su desarrollo. Para estas personas trazar el desarrollo de las ideas o el desarrollo de las operaciones puede ser de interés para los historiadores o para los psicólogos, pero no concierne directamente a los epistemólogos. La objeción que he delineado aquí constituye el argumento principal contra la epistemología genética.

Pero me parece que podemos plantear la siguiente réplica a esta objeción. El conocimiento científico está en perpetua evolución; cambia de un día a otro. De esto resulta que no podemos decir que por un lado existe la historia del conocimiento y por otro su estado actual como si fuera algo definitivo o aún estable. El estado actual del conocimiento es un momento en la historia que cambia tan rápidamente como cualquier estado anterior del conocimiento que ha cambiado en el pasado y, en muchos casos, muy rápidamente. El pensamiento científico, entonces, no es permanente, no es una instancia estática, es un proceso. Más específicamente, es un proceso continuo de construcción y reorganización. Esto es verdadero en casi todas las ramas de la investigación científica. Me gustaría citar uno o dos ejemplos.

El primer ejemplo, que se da casi por supuesto, concierne al área de la física contemporánea o, más específicamente, a la microfísica, donde el estado del conocimiento cambia de mes a mes y ciertamente se altera significativamente dentro del curso de un año. Estos cambios a menudo tienen lugar dentro del trabajo de un solo autor que cambia de punto de vista en su especialidad durante el curso de su carrera. Tenemos como un caso específico a Louis de Broglie, en París. Hace pocos años de Broglie se adhirió al punto de vista indeterminista de Niels Bohr. Él creía, con la escuela de Copenhague, que detrás del indeterminismo de los

4 Piaget, Jean (1970) *Genetic Epistemology*. New York, Columbia University Press, pp. 1 - 40. Traducción de Luis Piscoya Hermoza.

eventos microfísicos no se podría encontrar ningún determinismo, que el indeterminismo era una realidad muy profunda y que se podían demostrar las razones que hacían necesario este indeterminismo. Bien, pues sucedió que nuevos hechos hicieron cambiar de actitud a De Broglie, de tal manera que sostiene ahora el punto de vista opuesto. Aquí tenemos un ejemplo de transformación en el pensamiento científico, no en varias generaciones sucesivas sino dentro de la carrera de un hombre de ciencia creador.

Tenemos otro ejemplo del área de las matemáticas. Hace pocos años el grupo Bourbaki de matemáticas intentó aislar las estructuras fundamentales de todas las matemáticas. Estableció tres estructuras madres: una estructura algebraica, una estructura de orden y una estructura topológica sobre las cuales se fundamentó la escuela estructuralista de las matemáticas. Ellas fueron vistas como el fundamento de todas las estructuras matemáticas de las cuales se derivan las otras. Este esfuerzo, que fue muy fructífero, ha sido ahora sobrepasado en alguna extensión o por lo menos cambiado desde que Mac Laine y Elesberg han desarrollado la noción de categoría, esto es, de conjuntos de elementos que se consideran agregados con el conjunto de todas las funciones definidas en ellos. Como resultado tenemos que hoy día una parte del grupo Bourbaki no es más ortodoxa sino que toma en cuenta la noción más reciente de categoría. Aquí tenemos otra área del pensamiento científico, más bien fundamental, que está cambiando muy rápidamente.

Permítanme repetir otra vez que no podemos afirmar que tenemos, por un lado, la historia del conocimiento científico y, por el otro, el cuerpo del pensamiento científico tal como es hoy. Hay simplemente una transformación continua, una reorganización continua. Y este hecho me parece que implica que los factores históricos y psicológicos de estos cambios son de interés en nuestro intento de comprender la naturaleza del conocimiento científico.

Me gustaría dar uno o dos ejemplos de áreas en las cuales la génesis de ideas científicas contemporáneas puede ser mejor comprendida a la luz de factores psicológicos o sociológicos. El primero es el desarrollo de la teoría de conjuntos por Cantor. Él desarrolló esta teoría sobre la base de una operación fundamental, la de la correspondencia de *uno a uno*. Más específicamente, estableciendo la correspondencia de uno a uno entre la serie de los números enteros y la serie de los números impares, obtenemos un número que no es ni un número entero, ni un número impar, sino el primer número cardinal transfinito, *aleph cero*. Esta misma operación elemental de la correspondencia uno a uno permitió entonces a Cantor ir más allá de la serie de los números finitos, que era la única que se había usado hasta su tiempo. Es interesante preguntar ahora de dónde procede esta operación de correspondencia uno a uno. Cantor no la inventó, en el sentido en que uno inventa una construcción radicalmente nueva. Él la encontró en su propio pensamiento. Formaba ya parte de su equipaje mental mucho antes de que se interesara por las matemáticas. Porque la más elemental observación sociológica revela que la correspondencia uno a uno es una operación primitiva.

En toda clase de sociedades primitivas la correspondencia uno a uno es la base para el intercambio económico y encontramos sus raíces en niños pequeños aún antes de que alcancen el nivel de las operaciones concretas. La siguiente pregunta que surge es: ¿cuál es la naturaleza de esta muy elemental operación de correspondencia uno a uno? Y directamente somos conducidos a una cuestión correlativa: ¿cuál es la relación de la correspondencia uno a uno con el desarrollo de la noción de número natural? ¿Justifica la amplia presencia de la

operación de correspondencia uno a uno la tesis de Russell y Whitehead de que el número es la clase de las clases de equivalencia (equivalentes en el sentido de la correspondencia uno a uno entre sus miembros)? ¿O se basan los números reales en algunas otras operaciones que se añaden a la correspondencia uno a uno? Esta es una pregunta que examinaremos con más detalle más tarde. Este es un caso sorprendente en el cual el conocimiento de los fundamentos psicológicos de una noción tiene implicaciones para la comprensión epistemológica de esta noción. Al estudiar el desarrollo de la noción de número en los niños podemos ver si se basa o no simplemente en la noción de la clase de clases equivalentes o si alguna operación se encuentra también implicada.

Me gustaría pasar ahora a un segundo ejemplo y plantear la segunda pregunta: ¿cómo fue que Einstein fue capaz de dar nueva definición operacional de simultaneidad a la distancia? ¿Cómo fue capaz de criticar la noción newtoniana de tiempo universal sin dar lugar a una crisis profunda dentro de la física? Por supuesto que la crítica tuvo sus raíces en los resultados experimentales, tal como el experimento de Michelson-Morley que se realizó sin resultado. No obstante, si esta redefinición de la posibilidad de elementos simultáneos a grandes distancias uno de otro hubiera ido contra la médula de nuestra lógica, habría ocurrido una crisis considerable dentro de la física.

Hubiéramos tenido que aceptar una de dos posibilidades: o bien el mundo físico no es racional o bien la razón humana es impotente o incapaz de captar la realidad externa. De hecho no ha sucedido nada por el estilo. No ha habido tal debacle. Unos pocos metafísicos, (me disculpan los filósofos y presentes), tales como Bergson y Maritain, fueron impresionados por esta revolución en la física, pero para la mayoría y entre los científicos mismos esta no fue una crisis. No fue una crisis, porque la simultaneidad no es una noción primitiva, no es un concepto primitivo ni es tampoco una percepción primitiva. Trataré adicionalmente este asunto más tarde, pero en este momento me gustaría dejar establecido que nuestros resultados experimentales han demostrado que los seres humanos no perciben la simultaneidad con precisión. Si nosotros observamos dos objetos moviéndose a diferentes velocidades, y se detienen al mismo tiempo, nosotros no tenemos una percepción adecuada de que ellos se detuvieron al mismo tiempo. Similarmente, los niños no tienen una idea muy exacta de lo que es la simultaneidad, ellos no la conciben independientemente de la velocidad a la que los objetos viajan. La simultaneidad no es, pues, una noción primitiva; es una construcción intelectual.

Mucho tiempo antes que Einstein, Henri Poincaré trabajó mucho en analizar la noción de simultaneidad, revelando su complejidad. Sus estudios lo llevaron, de hecho, casi al umbral del descubrimiento de la relatividad. Si leemos ahora sus ensayos sobre esta materia que, dicho sea de paso, son de lo más interesantes cuando se consideran a la luz del trabajo último de Einstein, veremos que sus reflexiones se basaron casi enteramente en argumentos psicológicos. *Más tarde demostraré que la noción de tiempo y la noción de simultaneidad se basan en la noción de velocidad, que es una intuición más primitiva*. Así hay toda clase de razones, razones psicológicas, que pueden explicar por qué la crisis causada por la teoría de la relatividad no fue una crisis fatal para la física. Más bien fue un reajuste y se puede encontrar sus rutas psicológicas, así como sus bases experimentales y lógicas. Como una cuestión de hecho, Einstein mismo reconoció la relevancia de los factores psicológicos, y cuando tuve la buena suerte de reunirme con él, por primera vez, en 1928, me sugirió que

sería interesante estudiar el origen en los niños de las nociones de tiempo y en particular de las nociones de simultaneidad en los niños.

Lo que he dicho hasta ahora sugiere que puede ser útil hacer uso de datos psicológicos cuando estamos considerando la naturaleza del conocimiento. Me gustaría decir ahora que es más que útil; es indispensable. De hecho, todos los epistemólogos se refieren a factores psicológicos en sus análisis, pero en su mayor parte sus referencias a la psicología son especulativas y no se basan en la investigación psicológica que se vuelve relevante y debe ser tomada en cuenta. Una cosa infortunada para la psicología es que cada uno piense de sí mismo como un psicólogo. Como resultado, cuando un epistemólogo necesita recurrir a un aspecto psicológico, no se refiere a la investigación psicológica y no consulta a los psicólogos; se basa en sus propias reflexiones. Pone juntas ciertas ideas y relaciones dentro de su propio pensamiento, y su intento personal de resolver el problema psicológico que ha surgido. Me gustaría citar algunos casos en la epistemología en los que las investigaciones psicológicas pueden ser pertinentes, aun cuando ellas parezcan, a primera vista, completamente alejadas del problema.

Mi primer ejemplo concierne a la escuela del positivismo lógico. Los positivistas lógicos nunca han tenido en cuenta a la psicología en su epistemología, pues afirman que las entidades lógicas y las entidades matemáticas no son sino estructuras lingüísticas. Es decir, que cuando estamos haciendo lógica o matemática, estamos simplemente usando la sintaxis general, la semántica o la pragmática en el sentido de Morris, siendo en este último caso una regla de los usos del lenguaje general. La tesis que defienden es que la realidad lógica y matemática se deriva del lenguaje. *La lógica y la matemática no son sino estructuras lingüísticas.* Aquí se torna pertinente examinar los resultados fácticos. Podemos ver si hay alguna conducta lógica en los niños antes que se desarrolle el lenguaje. Podemos ver si la coordinación de sus acciones revela una lógica de clases, revela un sistema ordenado o revela estructuras correspondientes. Si encontramos estructuras lógicas en la coordinación de acciones en niños pequeños, aún antes del desarrollo del lenguaje, no nos encontraríamos en posición de decir que estas estructuras lógicas se derivan del lenguaje. Esta es una cuestión de hecho y debiera ser resuelta no por la especulación sino por la metodología experimental con sus resultados objetivos.

El primer principio de la epistemología genética es, en consecuencia, este: tomar la psicología seriamente. Tomar la psicología seriamente significa que, cuando surge como cuestión un hecho psicológico, se debe consultar la investigación psicológica en vez de tratar de inventar una solución por medio de la especulación.

Es digno de mencionarse que de la misma manera que en el campo de la lingüística, desde los dorados días del positivismo lógico, la decisión teórica ha cambiado. En su tiempo, Chomsky se adhirió completamente al punto de vista de los positivistas lógicos, al punto de vista lingüístico de la lógica. Pero actualmente, como ustedes saben, Chomsky sostiene la posición opuesta.

Chomsky afirma que la lógica no se basa ni se deriva del lenguaje, sino que al contrario, el lenguaje se basa en la lógica, en la razón y considera que esta razón es innata. Quizás va demasiado lejos al sostener que es innata; esta es de nuevo una cuestión que debe ser deci-

dida refiriéndose a los hechos, a la investigación. Es otro problema para ser esclarecido en el campo de la psicología. Entre el racionalismo que Chomsky defiende en nuestros días (de acuerdo al cual el lenguaje se basa en la razón que considera innata en el hombre) y el punto de vista lingüístico de los positivistas (de acuerdo al cual la lógica es una simple convención lingüística) hay una elección amplia de soluciones que debe ser realizada basándose en los hechos, es decir, basándose en la investigación psicológica. Los problemas no pueden ser resueltos por la especulación.

No quiero dar la impresión de que la epistemología genética se basa exclusivamente en la psicología. Por el contrario, la formalización lógica es absolutamente esencial cada vez que podemos hacer alguna formalización; cada vez que podemos abordar alguna estructura completa en el curso del desarrollo del conocimiento, hacemos un esfuerzo, con la colaboración de los lógicos o de especialistas dentro del campo que estamos considerando, para formalizar esta estructura. Nuestra hipótesis es que debe haber una correspondencia entre la información psicológica, por un lado, y la formalización en la epistemología. Nos damos cuenta también que la formalización no puede ser suficiente por sí misma. Hemos intentado señalar áreas en las que la investigación psicológica es indispensable para echar luz sobre ciertos problemas epistemológicos, pero aún sobre los propios fundamentos de la formalización hay un número de razones que explican por qué esta no puede ser nunca suficiente por sí misma. Me gustaría discutir tres de estas razones. La primera razón es que hay muchas lógicas diferentes, y no justamente una sola lógica. Esto significa que ninguna lógica singular es bastante fuerte para sustentar toda la constitución del conocimiento humano. Cualquier lógica, en consecuencia, es demasiado débil para constituir el valor de base para el conocimiento. Esta es la primera razón de por qué la sola formalización no es suficiente.

La segunda razón se funda en el teorema de Gödel. Este establece el hecho de que hay límites para la formalización, cualquier sistema consistente suficientemente rico para contener la aritmética elemental no puede probar su propia consistencia. Así surgen las siguientes preguntas: ¿es la lógica una formalización, una axiomatización de algo?, ¿pero de qué exactamente?, ¿qué formaliza la lógica? Este es un problema grave. Hay aún dos problemas aquí. Cualquier sistema axiomático contiene proposiciones indemostrables o axiomas en el punto de inicio, a partir de los cuales otras proposiciones pueden ser demostradas; y contiene también conceptos no definidos que son las nociones fundamentales sobre la base de las cuales las otras nociones pueden ser definidas. En el caso de la lógica ¿Qué reside debajo de los axiomas indemostrables o de las nociones indefinibles? Este es el problema del estructuralismo en la lógica y este es el problema que muestra la inadecuación de la formalización como base fundamental. Muestra la necesidad de considerar el pensamiento mismo tanto como los sistemas lógicos en los cuales permanecen aún nociones intuitivas.

La tercera razón de por qué la formalización no es suficiente es que la epistemología pretende definir el conocimiento como es realmente dentro de las áreas de la ciencia, y este conocimiento es, de hecho, no puramente formal: hay otros aspectos en él. En este contexto, me gustaría citar a un lógico amigo, el profesor Evert W. Beth. Por mucho tiempo fue un fuerte adversario de la psicología en general y de la introducción de observaciones psicológicas en el campo de la epistemología y de hecho adversario de mi propio trabajo, puesto que se basaba en la psicología. No obstante, en interés de una confrontación intelectual, nos hizo el honor de asistir a uno de los simposios sobre epistemología genética y observar más cerca-

namente las cuestiones que nos concernían. Al finalizar el simposio estuvo de acuerdo en ser coautor conmigo, a despecho de su temor por los psicólogos de un trabajo que denominamos *Epistemología matemática y psicológica*. Ha aparecido en francés y está siendo traducida al inglés. En la conclusión de este volumen, Beth escribió lo que sigue: «El problema de la epistemología es explicar cómo el pensamiento humano real es capaz de producir el conocimiento científico. Para lograr esto, debemos establecer cierta coordinación entre la lógica y la psicología». Esta declaración no sugiere que la psicología deba interferir directamente en la lógica, lo que no es verdad por supuesto, pero sostiene que en epistemología, tanto la lógica como la psicología deben ser tenidas en cuenta, puesto que es importante tratar tanto los aspectos formales como los aspectos empíricos del conocimiento humano.

Así, en suma, la epistemología genética trata tanto la formación como el significado del conocimiento. Podemos formular nuestro problema en los siguientes términos: ¿por qué medios la mente humana va de un estado de conocimiento menos suficiente a un estado de conocimiento superior? La decisión sobre lo que es conocimiento menos adecuado o inferior y lo que es conocimiento superior, tiene desde luego, aspectos formales y normativos. No es a los psicólogos a los que compete determinar si un cierto estado de conocimiento es superior o no a otro estado. Esa decisión compete a los lógicos o especialistas dentro de un campo dado de la ciencia. Por ejemplo, en el área de la física, es a los físicos a los que compete decidir si una teoría dada muestra o no algún progreso sobre otra teoría. Nuestro problema, desde el punto de vista de la psicología y desde el punto de vista de la epistemología genética, es explicar cómo se hace la transición de un nivel inferior de conocimiento a un nivel que es considerado superior. La naturaleza de estas transiciones es una cuestión práctica. Las transiciones son históricas o psicológicas y algunas veces son biológicas, como demostraré más adelante.

La hipótesis fundamental de la epistemología genética es que hay un paralelismo entre el progreso hecho en la organización lógica y racional del conocimiento y el correspondiente proceso formativo psicológico. Ahora bien, si esta es nuestra hipótesis ¿cuál será nuestro campo de estudio? Por supuesto que el campo más fructífero y más obvio de estudio revisará la reconstitución de la historia humana, la historia del pensamiento humano en el hombre prehistórico. Infortunadamente no estamos bien informados de la psicología del Hombre de *Neanderthal* o de la psicología del *Homo Siniensis* de Teilhard de Chardin. Puesto que este campo de la biogénesis no es accesible para nosotros, haremos lo que hacen los biólogos y nos volcaremos sobre la ontogénesis. Nada puede ser más accesible al estudio que la ontogénesis de estas nociones. Hay niños por todas partes alrededor nuestro. Es con los niños que tenemos la mejor oportunidad de estudiar el desarrollo del conocimiento lógico, del conocimiento matemático, del conocimiento físico y así sucesivamente. Estas son las cosas que discutiré después en el libro.

Para abordar este campo de estudio me gustaría mucho referirme a algunos asuntos específicos y comenzar con el desarrollo de las estructuras lógicas en los niños. Comenzaré haciendo una distinción entre dos aspectos del pensamiento que son diferentes aunque complementarios. Uno es el figurativo y al otro lo llamaremos operativo. El aspecto figurativo es una imitación de estados tomados como momentáneos y estáticos. En el área cognitiva las funciones figurativas son, sobre todo, la percepción; la imitación; y la producción de imágenes mentales, la que es, en efecto, imitación interiorizada. El aspecto operativo del pensamiento

no trata con estados sino con transformaciones de un estado a otro. Por ejemplo, incluye las acciones mismas que transforman objetos o estados y también incluye las operaciones intelectuales que son esencialmente sistemas de transformación. Estas son comparables a otras acciones pero son reversibles, esto es, pueden ser efectuadas en ambas direcciones (esto significa que los resultados de la acción A pueden ser eliminados por otra acción B, que es su inversa; el producto de A por B conduce a la operación de identidad 'A por B igual B por A' dejando el estado inicial invariante) y son susceptibles de ser interiorizadas: pueden ser efectuadas a través de representaciones y no a través de actos reales. Ahora, los aspectos figurativos están siempre subordinados a los aspectos operativos. Cualquier estado puede ser comprendido solamente como el resultado de ciertas transformaciones o como el punto de partida para otras. Vale decir, desde mi modo de pensar, el aspecto esencial del pensamiento es el *operativo* y no el figurativo.

Para expresar la misma idea de otra manera todavía, pienso que el conocimiento humano es esencialmente activo. Conocer es asimilar la realidad dentro de sistemas de transformaciones. Conocer es transformar la realidad para comprender cómo un cierto estado de cosas se ha originado. En virtud de este punto de vista me encuentro a mí mismo opuesto a la visión del conocimiento como una copia, una copia pasiva de la realidad. Considerando los hechos, esta noción está basada sobre un círculo vicioso: para hacer una copia tenemos que conocer el modelo que estamos copiando, pero como de acuerdo a esta teoría del conocimiento la única manera de conocer un modelo es copiándolo, caemos en un círculo que nos incapacita siempre para saber si nuestra copia del modelo coincide con él o no. Para mi modo de pensar, conocer un objeto no significa copiarlo sino actuar sobre él. Significa construir sistemas de transformación que pueden ser llevados a efecto en o con el objeto. El conocimiento de la realidad significa la construcción de sistemas de transformación que corresponden más o menos adecuadamente a la realidad. Ellos son más o menos isomorfos a transformaciones de la realidad. Las estructuras transformacionales que constituyen el conocimiento no son copias de las transformaciones en la realidad; ellas son simplemente posibles modelos isomorfos entre los cuales podemos elegir capacitados por la experiencia. El conocimiento, por tanto, es un sistema de transformaciones que resulta progresivamente adecuado.

Se concede que las estructuras lógicas y matemáticas son abstractas mientras que el conocimiento físico, el conocimiento basado en la experiencia en general, es concreto. Pero permítasenos preguntar, de qué es abstraído el conocimiento lógico y matemático. Hay dos posibilidades. La primera es que cuando actuamos sobre un objeto, nuestro conocimiento sea derivado del objeto en sí mismo. Este es el punto de vista del empirismo en general y es válido en el caso del conocimiento empírico o experimental en su mayor parte. Pero hay una segunda posibilidad: cuando estamos actuando sobre un objeto nosotros podemos también tomar en cuenta la acción misma o la operación debido a que las transformaciones pueden ser llevadas a cabo mentalmente. *En esta hipótesis la abstracción no es derivada del objeto sobre el cual se actúa sino de la acción misma. Me parece que esta es la base de la abstracción lógica y matemática.*

En los casos referentes al mundo físico, la abstracción es abstracción desde los objetos mismos. Un niño, por ejemplo, puede sostener objetos en sus manos y darse cuenta que ellos tienen diferentes pesos, que usualmente las cosas grandes pesan más que las pequeñas, pero que a veces las pequeñas pesan más que las grandes. Todo esto él lo comprende empíricamen-

te y su conocimiento es abstraído de los objetos mismos. Pero me gustaría dar un ejemplo, tan elemental como el anterior, en el cual el conocimiento es abstraído desde las acciones, desde la coordinación de acciones y no desde los objetos. Este ejemplo que hemos estudiado concienzudamente con muchos niños me fue sugerido primero por un amigo matemático, quien lo mencionó como el punto de partida de su interés en matemáticas. Cuando él era niño estuvo un día contando guijarros. Los alineó a ellos en una hilera, los contó de izquierda a derecha y encontró que eran diez. Luego, solo por divertirse, él contó los guijarros de derecha a izquierda para ver qué número encontraría y se quedó atónito de que nuevamente encontró diez. Él puso los guijarros en un círculo y los contó en esta nueva disposición y una vez más había diez. Luego recorrió el círculo en sentido contrario, esta vez, y contó diez. Y no importó cómo dispuso los guijarros, cuando los contaba descubrió la conmutatividad, esto es, la suma es independiente del orden. Pero ¿cómo él descubrió esto?, ¿es la conmutatividad una propiedad de los guijarros? Es verdad que los guijarros, por así decirlo, le permitieron a él disponerlos de diferentes maneras: no podría haber hecho la misma cosa con gotas de agua. Así en este sentido hubo un aspecto físico favorable para este conocimiento. Pero el orden no estaba en los guijarros; fue él, el sujeto, quien puso los guijarros en línea y luego en círculo. Más aún, la suma no estaba en los guijarros mismos, fue él quien los unió. El conocimiento que este futuro matemático descubrió ese día no fue derivado de las propiedades físicas de los guijarros sino de las acciones que él efectuó sobre ellos. A este conocimiento llamo conocimiento lógico matemático y no conocimiento físico.

Al primer tipo de abstracción, desde los objetos, me referiré como abstracción simple pero al segundo tipo llamaré abstracción reflectiva, usando el término en doble sentido: 'reflectiva' tiene aquí al menos dos significaciones en el campo psicológico, en adición a la que tiene en el campo físico. En sentido físico reflexión se refiere a un fenómeno como la refracción de un rayo de luz lanzado de una superficie sobre otra. En un primer sentido psicológico, abstracción es la transposición de un nivel jerarquizado a otro (por ejemplo, del nivel de la acción al de la operación). En un segundo sentido psicológico, reflexión se refiere al proceso mental de reflexión, esto es, al nivel del pensamiento en el que tiene lugar una reorganización.

Me gustaría ahora hacer una distinción entre dos tipos de acciones. Por un lado, hay acciones individuales como lanzar, empujar, tocar, frotar. Son estas acciones independientes entre sí desde los objetos. Estas son las abstracciones de tipo simple que he mencionado antes. La abstracción reflectiva, sin embargo, no está basada en acciones independientes entre sí sino en acciones coordinadas. Acciones que pueden ser coordinadas de numerosas maneras diferentes. Ellas pueden ser puestas juntas, por ejemplo, en cuyo caso llamamos a esto una coordinación aditiva. O ellas pueden suceder una a otra en un orden temporal: llamamos a esto una coordinación ordinal o secuencial. Hay un antes y un después, por ejemplo, en la organización de acciones para lograr un objetivo cuando ciertas acciones son esenciales como medios para alcanzar dicho objetivo. Otro tipo de coordinación entre acciones es establecer una correspondencia entre una acción y otra. Una cuarta forma es el establecimiento de interacciones entre acciones. Ahora, todas estas formas de coordinación tienen paralelos en las estructuras lógicas, y es dicha coordinación, a nivel de la acción, que parece ser la base de las estructuras lógicas tal como ellas se desarrollan después en el pensamiento. *Esta es, en efecto, nuestra hipótesis: las raíces del pensamiento lógico no se encuentran solamente en el lenguaje, aunque las coordinaciones del lenguaje son impor-*

tantes, sino que se encuentran más generalmente en la coordinación de acciones, las cuales son las bases de la abstracción reflectiva. En honor a la completitud, podemos añadir que naturalmente la distinción entre acciones individuales y coordinaciones es solo gradual y no una tajante. Aun empujar, tocar o frotar tienen una organización de tipo simple constituida por sub-acciones más pequeñas.

Este solamente es el comienzo de un análisis regresivo que puede ir más lejos. En epistemología genética, tanto como en psicología del desarrollo no hay un comienzo absoluto. Nunca podemos regresar al punto donde podamos decir «Aquí está el mismo comienzo de las estructuras lógicas». Tan pronto como comenzamos hablando acerca de la coordinación general de acciones vamos a encontrarnos a nosotros mismos, por supuesto, más lejos, penetrando, en nuestra regresión, dentro del área de la biología. Inmediatamente ingresaremos en el reino de las coordinaciones dentro del sistema nervioso y de los circuitos neuronales tan discutidos por McCulloch y Pitts. Y luego, si buscamos las raíces de la lógica del sistema nervioso, como se proponen estos investigadores, tendremos que retroceder un peldaño más. Así encontraremos coordinaciones orgánicas más básicas. Si vamos más allá todavía, dentro del reino de la biología comparada, encontraremos estructuras ordenadas inclusivas por doquier. No intento ir dentro de la biología; lo que justamente quiero es llevar este análisis regresivo a sus comienzos en psicología y enfatizar nuevamente que la formación de estructuras lógicas y matemáticas en el pensamiento humano no puede ser explicada solo por el lenguaje porque tiene sus raíces en la coordinación general de acciones.

Habiendo demostrado que las raíces de las estructuras lógicas y matemáticas se encuentran en la coordinación de acciones, aún antes del desarrollo del lenguaje, me gustaría ahora prestar atención a cómo estas coordinaciones de acciones se convierten en operaciones mentales y cómo estas operaciones constituyen estructuras. Comenzaré definiendo lo que significa para mí una operación en términos de cuatro características fundamentales.

Primero que todo, una operación es una acción que puede ser internalizada, esto es, que puede ser realizada en el pensamiento tanto como ejecutada materialmente. Segundo, es una acción reversible, esto es, puede suceder en una dirección o en la dirección opuesta. Esto no es verdad de todas las acciones. Si fumo mi pipa hasta el final, no puedo revertir esta acción para retroceder y tenerla nuevamente llena con el mismo tabaco. Tengo que comenzar una vez más y llenarla con tabaco nuevo. De otro lado, la adición es un ejemplo de operación. Puedo añadir uno más uno y tener dos y puedo sustraer uno de dos y tener nuevamente uno. La sustracción es simplemente la operación inversa a la adición; exactamente la misma operación llevada a efecto en otra dirección. Hay dos tipos de reversibilidad que me gustaría distinguir en este punto. La primera es la reversibilidad por inversión o negación, por ejemplo:

$$+A - A = 0 \text{ ó } +1 - 1 = 0.$$

La segunda es la reversibilidad por reciprocidad, esta no es negación sino un orden inverso. Por ejemplo, A = B, la recíproca también es verdadera: B = A. La tercera característica de una operación es que siempre supone alguna conservación, alguna invarianza. Es por supuesto una transformación desde que es una acción, pero es una transformación que no transforma todo a la vez o de otro modo no habría posibilidad de reversibilidad. Por

ejemplo, en el caso de la adición aritmética, nosotros podemos transformar la manera como agrupamos las partes. Podemos decir 5 + 1, o 4 + 2, o 3 + 3, pero lo invariante es la suma. La cuarta característica es que ninguna operación existe sola. Cada operación es relativa a un sistema de operaciones o a una estructura total, como nosotros la llamamos. Y me agradará ahora definir lo que queremos decir por estructura.

En primer lugar, una estructura es una totalidad; es decir, es un sistema gobernado por leyes que se aplican al sistema como tal y no solo a uno u otro elemento en el sistema. El sistema de los números enteros es un ejemplo de estructura desde que hay leyes que se aplican a las series como tales. Muchas estructuras matemáticas diferentes pueden ser descubiertas en las series de números enteros. Una, por ejemplo, es el grupo aditivo. Las reglas de asociatividad, conmutatividad, transitividad y de clausura, para la adición, se cumplen todas dentro de las series de números enteros. Una segunda característica de estas leyes es que son leyes de transformación; ellas no son características estáticas. En el caso de la adición de números enteros podemos transformar uno en otro añadiéndole algo. La tercera característica es que una estructura es auto-regulativa; esto es, al aplicar las leyes de transformación no necesitamos ir fuera del sistema para encontrar algún elemento externo. Similarmente, una vez que una ley de transformación ha sido aplicada al resultado no concluye fuera del sistema. Refiriéndome al grupo aditivo, una vez más, cuando añadimos un número entero a otro no tenemos que ir fuera de la serie de los números enteros en busca de algún elemento que no está en ella. Y una vez que sumamos un par de números enteros el resultado todavía permanece dentro de la serie. Podemos llamar a esto también clausura, pero no significa que una estructura como un todo no pueda ser relativa a otra estructura o a otras estructuras como totalidades. Cualquier estructura puede ser subestructura dentro de un sistema más grande. Es muy fácil ver que los números enteros son una parte de un sistema mayor que incluye a los números fraccionarios.

Deseo ahora examinar las tres estructuras madres de los matemáticos Bourbaki y plantear la cuestión de si estas estructuras madres corresponden a alguna cosa natural o psicológica, o son invenciones matemáticas certeras, establecidas por axiomatización.

Como ustedes conocen, el propósito de los matemáticos Bourbaki era encontrar estructuras que sean isomorfas entre todas las diversas ramas de las matemáticas. Hasta ese momento estas ramas tales como teoría de números, cálculo, geometría y topología habían sido distintas y no relacionadas. Lo que los Bourbaki se propusieron hacer es encontrar formas o estructuras que fueran comunes a estos diversos contenidos. Su procedimiento fue una especie de análisis regresivo comenzando desde cada estructura en cada rama, reduciéndola luego a su forma más elemental. No hubo nada a priori al respecto; fue el resultado de una investigación inductiva y un examen de las matemáticas tal como ellas existen. Esta búsqueda condujo a tres estructuras independientes que no son reducibles entre sí. Habiendo diferenciaciones dentro de cada una de estas estructuras o por combinación de dos o más estructuras todas las otras pueden ser generadas. Por esta razón se llaman estructuras madres. Ahora, la cuestión epistemológica básica es si estas estructuras son naturales en algún sentido, como los números naturales lo son, o si ellas son totalmente artificiales, simplemente el resultado de la teorización y de la axiomatización. En un intento por resolver este problema, permítaseme examinar con más detalle cada una de estas tres estructuras madres.

La primera es la que los Bourbaki llamaron estructura algebraica. El prototipo de esta estructura es la noción matemática de grupo. Hay toda clase de grupos matemáticos: el grupo de desplazamientos como se encuentra en geometría; el grupo aditivo, al que ya me he referido en las series de números enteros; y cualquier número de otros. Las estructuras algebraicas están caracterizadas por su forma de reversibilidad, la cual es de inversión en el sentido que describí antes. Esto se expresa de la siguiente manera:

$\mathbf{p} * \mathbf{p}^{-1} = \mathbf{o}$, que se lee como «la operación de p multiplicada por p a la menos uno (elemento inverso de p), es igual a cero».

El segundo tipo de estructura es la de orden. Esta estructura se aplica a relaciones, mientras que la estructura algebraica se aplica esencialmente a clases y a números. El prototipo de una estructura de orden es el reticulado (*lattice)* y la forma de reversibilidad característica de una estructura de orden es la reciprocidad. Podemos encontrar esta reciprocidad de las relaciones de orden si miramos a la lógica de las proposiciones, por ejemplo. En una estructura dentro de la lógica de las proposiciones la conjunción P y Q es el límite inferior de una transformación y la disyuntiva P o Q el límite superior. P y Q, la conjunción, precede a P o Q, la disyunción. Pero esta relación total puede ser expresada del modo inverso. Podemos decir que P o Q sigue a P y Q exactamente tan fácilmente como podemos decir que P o Q precede a P y Q. Esta es la forma de reversibilidad que llamo reciprocidad; no es absolutamente la misma cosa que inversión o negación. No hay cosa alguna negada aquí.

El tercer tipo de estructura es la estructura topológica basada en nociones tales como vecindad, fronteras y límites de aproximación. Esta se aplica no solo a la geometría sino también a muchas otras áreas de la matemática. Ahora, estos tres tipos de estructura parecen ser altamente abstractos. Sin embargo, en el pensamiento de un niño tan tierno, como uno de 6 o 7 años de edad, hemos encontrado estructuras que semejan cada uno de estos tres tipos y me gustará discutirlas aquí. Sin embargo, antes de hacerlo, relataré una corta historia en un intento por mostrar que mis conclusiones acerca de este paralelo entre las estructuras madres y las estructuras operacionales de los niños no son completamente arbitrarias.

Hace unos años asistí a una conferencia fuera de París titulada *Estructuras Mentales y Estructuras Matemática*. Esta conferencia reunió a matemáticos y a psicólogos para discutir estos problemas. Por mi parte, mi ignorancia de la matemática entonces fue mayor de la que admito hoy día. Por otro lado, el matemático Dieudonné, quien estaba representando a los matemáticos del grupo Bourbaki desconfiaba totalmente de cualquier cosa que tuviera que hacer con la psicología. Dieudonné dio una charla en la que describí las estructuras que había encontrado en el pensamiento infantil, y para la gran sorpresa de ambos coincidimos en ver que existía una directa relación entre estas tres estructuras matemáticas y las tres estructuras operacionales del pensamiento infantil. Por supuesto, estuvimos impresionados uno del otro y Dieudonné fue tan lejos como para decirme: «Esta es la primera vez que he tomado la psicología en serio. Puede ser también la última, pero en cualquier caso es la primera».

En el pensamiento infantil las estructuras algebraicas pueden ser encontradas muy generalizadamente, pero más prestamente en la lógica de las clases, en la lógica de la clasificación. Tomaré mi ejemplo de las operaciones de clasificación simple, esto es, justo dividiendo un grupo de objetos en montoncitos de acuerdo a sus similitudes, en lugar del más complejo

procedimiento de clasificación multiplicativa de acuerdo a un número de variables diferentes al mismo tiempo. Los niños son capaces de clasificar operacionalmente, en el mismo sentido en el cual definí ese término anteriormente, alrededor de los 7 u 8 años de edad. Pero hay toda clase de intentos de clasificación más primitivos en la etapa preoperacional. Si damos a niños de 4 o 5 años de edad formas recortadas, digamos configuraciones de la geometría simple como círculos, cuadrados y triángulos, ellos pueden agruparlas en colecciones sobre la base de su forma. El menor de los niños hará lo que yo llamo colecciones figurales; esto es, ellos harán un pequeño diseño con todos los círculos y otro pequeño diseño con todos los cuadrados y estos diseños serán una parte importante de la clasificación. Ellos pensarán que la clasificación ha sido cambiada si el diseño es cambiado.

Niños ligeramente mayores irán más lejos del aspecto figural y serán capaces de hacer pequeños montoncitos de recortes de formas similares. Pero mientras el niño puede llevar a cabo clasificaciones de este tipo no es capaz de comprender la relación de inclusión de clases. Es en este sentido que su habilidad clasificatoria es todavía pre-operacional. Él puede ser capaz de comparar subclases entre ellas cuantitativamente, pero él no puede deducir, por ejemplo, que la clase total necesariamente debe ser tan grande como, o más grande que, una de sus subclases constituyentes. Un niño de esta edad estará de acuerdo en que todos los patos son pájaros y en que no todos los pájaros son patos. Pero luego si a él se le pregunta si en los árboles hay más pájaros o más patos él responderá: «No lo sé, nunca los he contado». Es la relación de inclusión de clases la que da origen a la estructura operacional de clasificación, la cual es, en efecto, análoga a la estructura algebraica de los matemáticos. La estructura de la inclusión de clases toma la siguiente forma: patos más los otros pájaros que no son patos juntos forman la clase de todos los pájaros; pájaros más los otros animales que no son pájaros juntos forman la clase de todos los animales, etc. O, en otros términos $A + A' = B$, $B + B' = C$, etc. y es fácil ver que esta relación puede ser inmediatamente invertida. Los pájaros son lo que nos queda cuando de la clase de todos los animales sustraemos todos los animales que no son pájaros. Esta es la reversibilidad por negación que he mencionado antes: $A - A = 0$. Esto no es exactamente un grupo; hay inversión como hemos visto, pero también hay la tautología $A + A = A$. Pájaros más pájaros es igual a pájaros. Esto significa que la distributividad no se cumple dentro de esta estructura. Si escribimos $A + A - A$, el lugar donde pongamos paréntesis establecerá una diferencia en el resultado. $(A + A) - A = 0$, mientras que $A + (A - A) = A$ así no es un grupo completo; es lo que llamo grupoide y es una estructura similar a la algebraica.

Similarmente, hay muchas estructuras de orden en el pensamiento infantil justamente tan primitivas como la estructura clasificatoria. Un ejemplo muy simple es la estructura de seriación. Nosotros hemos dado a los niños el siguiente problema. Primero nos presentamos ante ellos con palitos de diferente longitud. Las diferencias de longitud son lo suficientemente pequeñas como para que se necesite una comparación cuidadosa para detectarlas. Esta no es una tarea perceptual fácil. Las diferencias de longitud oscilan entre 1/8 y 1/4 de pulgada y hay aproximadamente 10 palitos, el menor aproximadamente de 2 pulgadas de largo. Luego pedimos a los niños que los pongan en orden del más pequeño al más grande. Los niños preoperacionales abordan este problema sin marco de trabajo estructural alguno (en el sentido que he estado describiendo estructuras). Esto es, ellos toman uno grande y uno pequeño, luego otro grande y otro pequeño y así, algunas veces más, uno grande y otro pequeño, pero no hacen coordinaciones entre estos pares de palitos; o ellos pueden tomar

tres a la vez -uno pequeño, uno mediano y uno grande- y hacen varios tríos. Pero ellos no logran coordinar todos los palitos juntos en una sola serie. Niños ligeramente mayores al final de la etapa preoperacional tienen éxito en poner todos los palitos en serie pero solo por ensayo y por error; ellos no tienen una aproximación sistemática. Por contraste los niños de 7 años de edad tienen una manera totalmente diferente de abordar este problema. Es una aproximación muy exhaustiva y sistemática. Ellos primero encuentran el palito más pequeño, luego ellos buscan entre todos los restantes el más pequeño y nuevamente buscan entre los que quedan el más pequeño y así sucesivamente hasta que la estructura total, La serie completa, ha sido construida. La reversibilidad implicada aquí es de reciprocidad. Cuando el niño busca por el menor de los palitos que quedan él comprende al mismo tiempo que este es mayor que todos los palitos que ha tomado antes y menor que todos los que tomará luego. Él está coordinando aquí, al mismo tiempo, la relación «mayor que» y «menor que».

Hay aún una más convincente evidencia de la estructura operacional de esta teoría y es el hecho de que al mismo tiempo los niños resultan capaces de razonar sobre la base de la transitividad. Permítasenos relatar que nosotros presentamos dos palitos a los niños siendo el palito A más pequeño que el palito B. Luego nosotros escondemos el palito A y le mostramos el B junto con uno más grande, el palito C. Luego le pedimos que compare A con C. Los niños preoperacionales dirán que no lo saben porque nunca han visto a los palitos A y C juntos, no son capaces de compararlos. De otro lado, los niños operacionales, los niños que procedieron sistemáticamente en la seriación de los palitos, por ejemplo, dirán inmediatamente que C es mayor que B y B es mayor que A. De acuerdo a los lógicos la seriación es una colección de asimétricas relaciones transitivas. Vemos con completa claridad que las relaciones asimétricas y de transitividad en verdad se desarrollan mano a mano en el pensamiento de los infantes. Es muy obvio, más aún, que la estructura aquí es una cuya reversibilidad es reciprocidad y no negación. La reversibilidad es de la siguiente clase: A es menor que B, implica que B es mayor que A y esta no es una negación sino una relación de reciprocidad.

El tercer tipo de estructura de acuerdo a los matemáticos Bourbaki es la estructura topológica. La cuestión de su presencia en el pensamiento infantil es relativa a un problema muy interesante. En la historia de la geometría, el primer tipo formal fue la geometría métrica euclidiana de la antigua Grecia, el siguiente desarrollo fue la geometría proyectiva, la cual fue sugerida por los griegos, pero solo logró un desarrollo pleno en el siglo XVII. Mucho más tarde todavía vino la geometría topológica desarrollada en el siglo XIX. De otro lado, cuando nosotros vemos las relaciones teoréticas entre estos tres tipos de geometría, encontramos que el tipo más primitivo es la topología y que ambas, la geometría euclidiana y la proyectiva, pueden ser derivadas de la geometría topológica. En otras palabras, la topología es la fuente común de los otros tipos de geometría. Es una interesante cuestión, entonces, saber si en el desarrollo del pensamiento infantil la geometría sigue el orden histórico o el orden teorético. Más precisamente, ¿encontraremos que las intuiciones y operaciones euclidianas se desarrollan primero y las intuiciones y operaciones topológicas después? ¿o encontraremos que la relación es de la manera inversa? Lo que encontramos, en efecto, es que las primeras intuiciones son topológicas. Las primeras operaciones, también; son las que dividen el espacio, lo ordenan, las cuales son mucho más similares a las operaciones topológicas que a las euclidianas o a las métricas.

Me gustará darles un par de ejemplos de las intuiciones topológicas que existen en el nivel pre-operacional. Los niños pre-operacionales pueden distinguir, por supuesto, varias formas euclidianas-círculos de triángulos, de rectángulos, etc., como Binet ha mostrado. Ellos pueden hacer esto a los cuatro años de edad de acuerdo a sus normas. Pero miremos lo que ellos pueden hacer antes de esta edad. Si mostramos a ellos un dibujo y les decimos que lo copien dibujándolo, ellos dibujarán una forma cerrada más o menos circular. Si les mostramos a ellos un cuadrado y les pedimos que lo copien, ellos dibujarán nuevamente una forma cerrada más o menos circular. Una vez más, si les mostramos un triángulo, ellos dibujarán exactamente la misma cosa. Los dibujos que hacen copiando estas formas son virtualmente indistinguibles. Pero si por el otro lado les pedimos dibujar una cruz, copiar una cruz, ellos dibujarán algo totalmente diferente a sus dibujos de las figuras cerradas. Dibujarán una figura abierta, dos líneas que más o menos se cruzan o se tocan la una a la otra. En general, entonces, en estos dibujos vemos que los niños no han mantenido las distinciones en términos de diferentes formas euclidianas sino que ellos han conservado las distinciones topológicas. Las formas cerradas han sido dibujadas cerradas y las formas abiertas han sido dibujadas abiertas.

Perceptualmente, por supuesto, los niños reconocen distinciones entre formas euclidianas pero en la representación de estas formas para ellos mismos no parecen hacer tales distinciones. Uno puede pensar que esta es justamente una cuestión de control muscular, que los niños no son capaces de dibujar cuadrados. Pero nosotros podemos dar a ellos problemas que demandan una cantidad similar de control muscular. Podemos mostrarles tres diferentes figuras en las que hay un círculo grande y uno pequeño, pero en la primera el pequeño está dentro del grande, en la segunda el pequeño está fuera del grande y en la tercera el pequeño está sobre el borde del grande, la mitad adentro y la mitad afuera. Niños de tres años de edad que no dibujan cuadrados diferenciándolos de los círculos, sin embargo, copian estas figuras cuidadosamente, al menos preservando las relaciones, dentro, fuera y sobre el borde. Algunos niños encuentran medios descriptivos de referirse a la tercera figura, diciendo, por ejemplo, que el círculo pequeño está la mitad afuera. Esto implica que ellos ni lo ven dentro ni lo ven fuera sino sobre el borde; todas estas son relaciones topológicas.

Algunos autores han sostenido que la distinción entre figuras rectilíneas y curvilíneas es exactamente tan primitiva como estas distinciones entre dentro, fuera y sobre el borde. Las figuras rectilíneas y curvilíneas, por supuesto, no se distinguen dentro de la topología, ellas son diferentes solamente dentro de la geometría de Euclídes. En respuesta a estos autores citaré el trabajo de dos psicólogos de Montreal, Monique Leurendau y Andrien Pinard. Estos psicólogos repitieron todas nuestras investigaciones sobre geometría y representación espacial, tomando veinte sujetos de cada edad y haciendo cada uno de los experimentos con cada uno de los sujetos, lo cual es algo que nosotros no hemos hecho nunca. Y ellos procedieron a hacer un muy riguroso análisis cualitativo y estadístico de la conducta de cada uno de estos niños. Usaron estadística ordinal tal como Guttman la desarrolló. Su análisis reveló que en verdad algunos niños parecieron estar distinguiendo figuras curvilíneas de las rectilíneas, pero en cada caso ellos estuvieron utilizando realmente relaciones topológicas para hacer la distinción. Esto es, las figuras fueron diferentes en sus relaciones topológicas tanto como en las relaciones euclidianas de línea recta y línea curva y los niños estuvieron basando su juicio en el aspecto topológico de las figuras.

Hasta aquí he intentado demostrar que las tres estructuras madres de la matemática tienen sus raíces naturales en el desarrollo del pensamiento en los individuos. Quisiera mostrar ahora cómo en el pensamiento infantil otras estructuras pueden desarrollarse como resultado de combinaciones de dos o más de las estructuras básicas. Indiqué anteriormente que estas son la fuente de muchas de las variadas estructuras matemáticas en todas las diferentes ramas de esta disciplina. El ejemplo que tomaré de la psicología es la noción de número, la cual no está basada solamente en una de las estructuras primitivas sino que descansa sobre una combinación de dos de ellas.

Me he referido a la operación usada por Cantor en la construcción de los números transfinitos, nominalmente, la operación de correspondencia uno a uno. Comencemos ahora observando cómo se desarrolla esta operación en el pensamiento infantil. Nosotros hemos hecho un experimento de la siguiente clase. Hemos alineado, por así decirlo, ocho fichas rojas delante de un niño y luego le hemos dado a él un montón de fichas azules pidiéndole que separe del montón exactamente tantas fichas azules como rojas hay delante de él. En una etapa muy temprana el niño hará una línea de fichas azules aproximadamente tan larga como la línea de fichas rojas, pero no prestará ninguna atención a si hay o no realmente el mismo número de fichas azules y rojas. Una conducta un poquito más sofisticada es apartar sobre la base de una correspondencia de uno a uno, esto es, tomando una ficha azul y poniéndola directamente al lado de una roja. Esto es lo que llamo correspondencia óptica porque el niño considerará que la correspondencia uno a uno depende de esta relación de correspondencia espacial entre cada ficha azul y cada ficha roja.

Si cambiamos la disposición espacial sin añadir o quitar ficha alguna, simplemente esparcimos o comprimimos las fichas de una de las líneas, el niño dirá que las cosas han cambiado ahora y que ya no hay tantas fichas azules como rojas. Si contamos una hilera hasta ocho y luego le preguntamos cuántas fichas hay en la hilera que han sido esparcidas, él dirá «Deben haber nueve o diez». Aún si él cuenta cada hilera, ocho en la más corta y ocho en la más larga, él dirá: «Si hay ocho aquí y ocho allá, pero todavía hay más allá, es más larga». Finalmente, la correspondencia uno a uno se convierte en operacional y en ese momento aparece la conservación del número en el sentido que se comprende que el número no cambia solo porque los arreglos espaciales han cambiado. En esta etapa, una vez que el niño ha establecido una correspondencia uno a uno tomando una ficha azul para cada ficha roja, no importa cómo cambiemos las formas, él será capaz de decir sin contar o sin pensar mucho que el número todavía debe ser el mismo por la correspondencia uno a uno que él estableció al principio. La correspondencia uno a uno parece ser, luego, la base de la noción de número.

Esto trae inmediatamente a la mente el trabajo de Russell y Whitehead *en Principia Mathematica* donde ellos definen un número como una clase de clases equivalentes, equivalentes en el sentido de equivalencia numérica establecida a través de una correspondencia de uno a uno. Si tenemos una clase que consiste de cinco personas, por ejemplo, y una clase que consiste de cinco árboles, y una clase que consiste de cinco manzanas, lo que estas tres clases tienen en común es el número 5. Y es en este sentido que Russell y Whitehead establecen que un número es una clase de clases equivalentes. Ahora, esta visión de la base de la idea de número parece ser justificada, como he dicho antes, desde que, en efecto, el número parece derivarse de la correspondencia uno a uno. Pero hay dos tipos de correspondencia uno a uno y es importante para nosotros ver cuál es el tipo que Russell y Whitehead usaron.

Por un lado, hay una correspondencia uno a uno basada en las cualidades de los elementos. Un elemento de una clase es hecho corresponder a un elemento específico de otra a causa de las cualidades que las dos clases tienen en común. Supongamos, por ejemplo, que las clases que he mencionado antes (cinco personas, cinco árboles, cinco manzanas) son recortes de papel de cinco colores diferentes. Por tanto, hay cinco recortes de papel de la forma de una persona, cada uno de los colores: rojo, naranja, verde, amarillo y azul. Y con los mismos colores hay cinco recortes de la forma de un árbol y cinco más de la forma de una manzana. La correspondencia uno a uno cualitativa consistiría en poner la persona roja en correspondencia con el árbol rojo y con la manzana roja y así hacer lo mismo con cada uno de los cinco colores. Este es, en efecto, el procedimiento de la doble clasificación, se construye una matriz para clasificar dos dimensiones a la vez.

El otro tipo de correspondencia de uno a uno no se basa en cualidades de los elementos individuales. El ejemplo famoso de Russell y Whitehead de clases equivalentes establece correspondencia entre los meses del año, los mariscales de Napoleón, los doce apóstoles y los signos del zodiaco. En este ejemplo no hay cualidades de los miembros individuales que conduzcan a una correspondencia específica entre un elemento de una clase y un elemento de otra. No podemos decir, por ejemplo, que San Pedro corresponde al mes de enero, el cual corresponde al Mariscal Ney, quien corresponde a Cáncer. Cuando decimos que estos cuatro grupos corresponden el uno al otro estamos usando la correspondencia de uno a uno en el sentido de que cualquier elemento puede hacerse corresponder con cualquier otro. Cada elemento se cuenta como uno y sus cualidades particulares no tienen importancia alguna. Cada elemento resulta simplemente una unidad, una unidad aritmética.

Ciertamente, esta es una operación muy diferente a la operación de correspondencia de uno a uno en base a cualidades, la cual está fundada en la clasificación y da lugar a matrices, como describí antes. La correspondencia uno a uno en la cual cualquier elemento puede corresponder a cualquier otro es una operación muy diferente. Los elementos son despojados de sus cualidades y devienen en unidades aritméticas. Ahora, es muy claro que Russell y Whitehead no usaron la correspondencia uno a uno cualificada que se usa en la clasificación. Ellos han usado la correspondencia en la cual los elementos resultan unidades. Ellos no están basando, por tanto, el número solamente sobre la operación de clasificación como pretendieron. Han caído, por tanto, en círculo vicioso porque están intentando construir la noción de número sobre la base de la correspondencia de uno a uno, pero para establecer esta correspondencia, ellos se han visto obligados a recurrir a una unidad aritmética, esto es, a introducir la noción de un elemento no cualificado y de una unidad numérica para efectuar la correspondencia uno a uno. En consecuencia, para construir los números a partir de las clases, ellos han introducido los números dentro de las clases.

La solución de Russell y Whitehead, por tanto, no resultó ser adecuada. El problema sobre cuál es la base de la noción de número, el problema epistemológico, permanece y debemos buscar otra solución. La investigación psicológica parece ofrecer una. Cuando estudiamos la noción de número en el pensamiento infantil encontramos que no se basa en operaciones de clasificación solas sino que es una síntesis de dos estructuras diferentes. Encontramos que junto con las estructuras clasificatorias, las cuales son un ejemplo de las estructuras algebraicas de Bourbaki, también sirven de base a número, las estructuras de orden; esto es, una síntesis de dos tipos diferentes de estructuras. Es ciertamente verdad que la clasi-

ficación está implicada en la noción de número. La inclusión de clases está presupuesta en el sentido de que dos está incluido en tres, tres está incluido en cuatro, etc. Pero también necesitamos relaciones de orden por la siguiente razón: si consideramos que los elementos de las clases son equivalentes (y esta es por supuesto la base de la noción de número), luego por este mismo hecho es imposible distinguir un elemento de otro. Es imposible hablar de los elementos aparte. Llegamos a la tautología A + A = A; arribamos a una tautología lógica en lugar de a una serie numérica. Luego, dados todos estos elementos cuyas características distintivas estamos ignorando ¿Cómo vamos a distinguir entre ellos? El único medio posible es introducir un orden, Los elementos están dispuestos uno después de otro en el espacio, por ejemplo; o ellos son considerados uno después de otros en el tiempo; o ellos son contados uno después de otro. Esta relación de orden es la única manera por la cual elementos que de otra manera son considerados idénticos pueden ser distinguidos el uno del otro.

En conclusión, número es una síntesis de la inclusión de clases y la relación de orden. Depende de una estructura de tipo algebraico y de una estructura del tipo de orden, de ambas a la vez. Un tipo de estructura aisladamente no es adecuado.

Pienso que es realmente enteramente obvio, sino trivial, que número se basa en dos tipos diferentes de operación. En efecto, si observamos cualquier formulación teorética de número encontraremos que en las teorías de números basadas en la ordenación hay siempre un elemento de inclusión. Similarmente, las teorías basadas en cardinales tienen siempre un elemento de orden.

Me gustaría discutir un tópico final antes de dejar este análisis de los tipos de estructuras operacionales usados en el pensamiento lógico infantil. Al nivel en el que las operaciones concretas son examinadas, esto es, desde los 6 o 7 años de edad hasta los 11 o 12 años, hay dos tipos de reversibilidad: negación y reciprocidad. Pero ellas no están sintetizadas nunca en un solo sistema, así que no es posible ir de un tipo de reversibilidad a otro dentro del sistema. Al nivel de las operaciones formales que como he dicho comienza a aparecer a partir de los 11 ó 12 años de edad, se construyen nuevas estructuras lógicas que dan paso, por ejemplo, a la lógica de las proposiciones en la cual se puede encontrar ambos tipos de reversibilidad, con frecuencia semejante. Por ejemplo, examinemos la implicación: P implica Q; su negación es P y no Q; pero la recíproca Q implica P, puede también (en ciertos casos[5]) ser obtenible dentro del sistema, y cuando esto ocurre, la negación de esta recíproca Q y no P también se encuentran dentro del sistema. Esta última negación tiene una nueva relación con la implicación inicial y podemos llamarla correlativa.

Este más complejo tipo de estructura es puesto en evidencia cuando damos a los niños problemas incluyendo un doble marco de referencia y de espacio, por ejemplo, problemas de movimiento relativo. Supongamos que tenemos un caracol sobre un pequeño tablero. Si el caracol se mueve hacia la derecha podemos asumir que esto es una operación directa. Y la inversión o negación sería el movimiento del caracol hacia la izquierda. Pero la recíproca de un movimiento del caracol a la derecha sería un movimiento del tablero hacia la izquierda y la correlativa sería un movimiento del tablero a la derecha. Si el caracol se mueve a la derecha sobre el tablero y al mismo tiempo el tablero se mueve a la izquierda, con respecto a un marco de referencia externo es como si el caracol no se hubiera movido en absoluto.

5 Añadido del traductor que ayuda a la comprensión del lector no entrenado en lógica básica y que no altera el argumento de Piaget.

Con respecto a un marco externo de referencia hay dos formas de movimiento inverso del caracol: una es que el caracol regrese nuevamente, la otra es que el tablero se mueva. Antes de que los niños sean capaces de sintetizar los dos tipos de reversibilidad en un solo sistema, esto es, antes de los 11 o 12 años, ellos no pueden resolver problemas de esta clase, los cuales requieren una coordinación entre dos tipos diferentes de movimiento con dos marcos de referencia posibles.

Otra opinión, a menudo citada en los círculos filosóficos, es que la teoría del conocimiento estudia esencialmente la cuestión de la validez de la ciencia, los criterios de esta validez y su justificación. Si aceptamos este punto de vista, se arguye entonces que el estudio de la ciencia como es, como un hecho, es fundamentalmente irrelevante.

Ciencia y seudociencia[6]

El respeto del hombre por el conocimiento es una de sus características más peculiares. Conocimiento en latín es *'scientia'* y la ciencia devino en el nombre de la clase más respetable de conocimiento. ¿Pero qué diferencia al conocimiento de la superstición, la ideología o la seudociencia? La Iglesia Católica excomulgó a los seguidores de Copérnico, el Partido Comunista persiguió a los mendelianos sobre la base de que sus doctrinas eran seudocientíficas. La demarcación entre ciencia y seudociencia no es simplemente un problema de filosofía de gabinete, es de relevancia vital social y política.

Muchos filósofos han tratado de resolver el problema de la demarcación en los siguientes términos: un enunciado constituye conocimiento si un número suficiente de personas lo cree con suficiente firmeza. Pero la historia del pensamiento nos muestra que muchas personas estaban totalmente comprometidas con creencias absurdas. Si la fuerza de las creencias era un sello distintivo, tendríamos que incluir con el rango de conocimiento de algunos relatos sobre demonios, ángeles, cielos e infierno. Por otro lado, los científicos son escépticos incluso acerca de sus propias teorías. La de Newton es la más poderosa que la ciencia haya producido, pero el mismo Newton nunca creyó que los cuerpos se atrajeran a distancia. De modo que ningún grado de compromiso con las creencias las convierte en conocimiento. En verdad el sello distintivo de la conducta científica es cierto escepticismo, incluso hacia las teorías más acariciadas de uno. El aferrarse ciegamente a una teoría no es una virtud intelectual: es un crimen intelectual.

De este modo, un enunciado puede ser seudocientífico aunque sea eventualmente 'plausible' y todos crean en él, y puede ser científicamente válido aun cuando sea increíble y nadie crea en él. Una teoría puede ser incluso de valor científico supremo aun cuando nadie la entienda y menos la crea. El valor cognoscitivo de una teoría no tiene nada que ver con su influencia psicológica en la mente de las personas. La creencia, el compromiso y la comprensión son estados de la mente humana. Pero el objetivo, el valor científico de una teoría es independiente de la mente humana que la crea o la entiende. Su valor científico depende solo de qué apoyo objetivo tienen estas conjeturas en los hechos. Como dijo Hume:

> Si tomamos en nuestras manos cualquier volumen, sobre la divinidad o de metafísica de escuela, por ejemplo, preguntémonos ¿contiene algún razonamiento abstracto relacionado con cantidad o número? No. ¿Contiene algún razonamiento experimental relacionado con algún asunto de hecho y existencia? No. Entonces arrójenlo a las llamas. Pues no puede contener nada sino sofistería e ilusión.

6 El autor es Lakatos, Imre. El texto ha sido tomado de *Philosophy of Science* (1998) editado por Martin Curd y J. A. Cover, W.W. Norton & Company, New York/London, pp. 20-26. Traducción de Sonia Bockos y Felipe Temoche. Revisión técnica de Luis Piscoya Hermoza

¿Pero qué es el razonamiento experimental? Si miramos la vasta literatura del siglo XVII sobre la brujería está llena de informes o cuidadosas informaciones y evidencia bajo juramento, incluso de experimentos. Glanvill, el filósofo oficial de inicios de la Sociedad Real consideraba a la brujería como el paradigma de razonamiento experimental. Tenemos que definir el razonamiento experimental antes de empezar la humeana quema de libros.

En el razonamiento científico las teorías se confrontan con hechos y una de las condiciones centrales del razonamiento científico es que las teorías sean respaldadas por hechos. ¿Pero con cuanta exactitud pueden los hechos respaldar la teoría?

Varias respuestas diferentes se han propuesto. Newton mismo pensaba que él probaba sus leyes a partir de hechos. Estaba orgulloso de no enunciar meras hipótesis: solo publicaba teorías probadas a partir de hechos. En particular sostenía que dedujo sus leyes de los 'fenómenos' proporcionados par Kepler. Pero su orgullo no tenía sentido pues, de acuerdo a Kepler, los planetas se desplazan en movimientos elípticos, pero de acuerdo con la teoría de Newton, los planetas se desplazarían elípticamente si no se perturbaran recíprocamente en su movimiento. Pero esto ocurre. Esta es la razón por la cual Newton tuvo que crear una Teoría de Perturbación de la que se deriva que ningún planeta se desplaza en una elipse.

Actualmente se puede demostrar fácilmente que no puede existir derivación válida de una ley de la naturaleza de algún número finito de hechos pero todavía continuamos leyendo sobre teorías científicas probadas desde los hechos. ¿A qué se debe esta terca resistencia a la lógica elemental? Hay una explicación muy plausible. A los científicos les agrada hacer respetables sus teorías, merecedoras de la calificación de «ciencia», es decir, conocimiento genuino. Ahora bien, el conocimiento más relevante del siglo XVII, cuando nació la ciencia, tenía que ver con Dios, el Diablo, el Cielo y el Infierno. Si las conjeturas de uno sobre asuntos de divinidad resultaban equivocadas, la consecuencia de su error era el fuego eterno. El conocimiento teológico no puede ser falible: debe ir más allá de la duda. De otra parte, la Ilustración pensaba que éramos falibles e ignorantes acerca de asuntos teológicos. No existe teología científica y, en consecuencia, ningún conocimiento teológico. El conocimiento solo puede ser acerca de la naturaleza pero este nuevo tipo de conocimiento tenía que ser juzgado por los estándares tomados directamente de la teología: tenía que ser probado más allá de la duda. La ciencia tenía que lograr la certeza misma, la cual había escapado a la teología. A un científico merecedor de ser denominado así, no se le permitía adivinar: tenía que probar cada afirmación que él enunciaba a partir de hechos. Este era el criterio de honestidad científica. Las teorías que no eran probadas a partir de hechos eran consideradas como seudociencia sin sentido, herejía dentro de la comunidad científica. Fue solo la caída de la teoría newtoniana en este siglo lo que hizo que los científicos se dieran cuenta de que sus estándares de honestidad habían sido utópicos. Antes de Einstein la mayoría de los científicos pensaba que Newton había descifrado las leyes últimas de Dios probándolas a partir de los hechos. Ampère, a principios del siglo XIX sentía que tenía que denominar su libro sobre sus especulaciones referentes al electromagnetismo: *Teoría matemática de fenómenos electrodinámicos inequívocamente deducidos del experimento.* ¡Pero al final del volumen confiesa informalmente que algunos de los experimentos nunca se ejecutaron y que incluso los instrumentos necesarios no habían sido construidos! Si todas las teorías científicas son igualmente no verificables, ¿qué diferencia al conocimiento científico de la ignorancia, a la ciencia de la seudociencia?

Una respuesta a esta pregunta fue proporcionada en el siglo XX por los «lógicos inductivos». La lógica inductiva surgió para definir las probabilidades de diferentes teorías de acuerdo a la evidencia total disponible. Si la probabilidad matemática de una teoría es alta, se le califica como científica, y si es baja o incluso cero, no es científica. De este modo el sello distintivo de la honradez científica sería nunca decir nada que no sea por lo menos altamente probable. El probabilismo tiene una faceta atractiva: en vez de proporcionar simplemente una distinción de blanco y negro entre la ciencia y la seudociencia, proporciona una escala continua que parte de teorías pobres con baja probabilidad hasta buenas teorías con alta probabilidad. Pero, en 1934, Karl Popper, uno de los filósofos más influyentes de nuestros tiempos, argumentó que la probabilidad matemática de todas las teorías, científicas o seudocientíficas, dada cualquier cantidad de evidencia, es cero[7]. Si Popper tiene razón, las teorías científicas no solo son igualmente no verificables sino también improbables. Un nuevo criterio de demarcación se necesitaba y Popper propuso uno un tanto asombroso. Una teoría puede ser científica aun cuando no haya una pizca de evidencia en su favor, y puede ser seudocientífica aun cuando toda la evidencia esté en su favor. Esto es, el carácter científico o no científico de una teoría se puede determinar independientemente de los hechos. Una teoría es «científica» si uno está dispuesto a especificar de antemano un experimento (u observación) crucial que se puede someter a falsación, y es seudociencia si uno se niega a especificar tal 'falsador potencial' pero si es así no estamos demarcando las teorías científicas respecto de las seudocientíficas sino más bien el método científico del no científico. El marxismo, para un popperiano, es científico si los marxistas están dispuestos a especificar hechos que, si se observan, los hacen abandonar el marxismo. Si se rehúsan a hacerlo, el marxismo se convierte en una seudociencia. Siempre es interesante preguntarle a un marxista, qué evento concebible lo haría abandonar su marxismo. Si está comprometido con el marxismo, tiende a encontrar inmoral el especificar un estado de hechos que lo puedan falsar. De este modo, una proposición se puede petrificar en dogma seudocientífico o devenir en conocimiento genuino, dependiendo de si estamos dispuestos a determinar condiciones observables que lo refutarían.

¿Entonces, es el criterio de falsación de Popper la solución al problema de demarcar la ciencia de la seudociencia? No. Porque el criterio de Popper ignora la remarcable tenacidad de las teorías científicas. Los científicos tienen cuero duro. No abandonan una teoría simplemente porque los hechos la contradicen. Normalmente o inventan alguna hipótesis de rescate para explicar lo que denominan una mera anomalía o si no la pueden explicar, la ignoran y centran su atención en otros problemas. Obsérvese que los científicos hablan de anomalías, instancias recalcitrantes, no refutaciones. Por supuesto, la historia de la ciencia está llena de relatos de cómo experimentos cruciales argumentativamente aniquilaron teorías. Pero tales relatos fueron fabricados mucho después que la teoría había sido abandonada. De haber preguntado Popper a un científico newtoniano bajo qué condiciones experimentales abandonaría la teoría newtoniana, algunos científicos newtonianos habrían sido exactamente tan rígidos como algunos marxistas.

¿Entonces, cuál es el sello distintivo de la ciencia? ¿Tenemos que capitular y concordar que una revolución científica es simplemente un cambio irracional en el compromiso, es decir, una conversión religiosa? Tom Kuhn, un distinguido filósofo de la ciencia norteamericano,

7 El argumento de Popper para este alegato se puede encontrar en el Apéndice *xvii de *The Logic of Scientific Discover* (1959) Nueva York, Basic Books, pp. 363-367.

llegó a esta conclusión después de descubrir la ingenuidad del falsacionismo de Popper. Pero si Kuhn tiene razón, entonces no existe una demarcación explícita entre la ciencia y la seudociencia, ninguna distinción entre el progreso científico y la decadencia intelectual, no hay estándar objetivo de honestidad. ¿Pero qué criterios se pueden ofrecer entonces para demarcar el progreso científico en relación con la degeneración intelectual? En años recientes he estado abogando por una metodología de programas de investigación científica que resuelva algunos de los problemas que tanto Popper como Kuhn no han logrado resolver. En primer lugar, sostengo que la unidad descriptiva típica de los grandes logros científicos no es una hipótesis aislada sino más bien un programa de investigación. La ciencia no es simplemente ensayo y error, una serie de conjeturas y refutaciones. *Todos los cisnes son blancos* puede falsarse por el descubrimiento de un cisne negro. Pero tales ensayos y errores triviales no tienen el rango de ciencia. La ciencia newtoniana, por ejemplo, no es simplemente un conjunto de cuatro conjeturas, las tres leyes de la mecánica y la ley de la gravedad. Estas cuatro leyes constituyen solo el núcleo básico del programa newtoniano. Pero este núcleo está protegido tenazmente de refutación por un «cinturón protector» de hipótesis auxiliares. Y, lo que es más importante, el programa de investigación también tiene una maquinaria heurística, es decir una poderosa maquinaria de solución de problemas que, con la ayuda de sofisticadas técnicas matemáticas, asimila las anomalías e incluso las convierte en evidencia positiva. Por ejemplo, si un planeta no se desplaza exactamente como debería, el científico newtoniano chequea sus conjeturas relacionadas con la refracción atmosférica, la propagación de la luz en tormentas magnéticas y cientos de otras conjeturas que son parte del programa. Puede incluso inventar un planeta hasta entonces desconocido y calcular su posición, masa y velocidad para explicar la anomalía.

Entonces la teoría de la gravedad de Newton, la teoría de la relatividad de Einstein, la mecánica cuántica, el marxismo, el freudismo son todos programas de investigación, cada uno con un núcleo básico característico tercamente defendido, cada cual con su cinturón protector flexible y con su elaborada maquinaria de solución de problemas. Cada una de ellas, en alguna etapa de su desarrollo, tiene problemas insolubles y anomalías no asimiladas. En este sentido todas las teorías han nacido refutadas y muerto refutadas. ¿Pero son igualmente buenas? Hasta ahora he estado describiendo cómo son los programas de investigación. ¿Pero cómo se puede distinguir un programa científico o progresivo de uno seudocientífico o degenerativo?

Al contrario de Popper, la diferencia no puede ser que algunos programas todavía no son refutados mientras que otros ya están refutados. Cuando Newton publicó su *Principia* era conocimiento común que no podía explicar apropiadamente el desplazamiento de la luna, de hecho, el desplazamiento lunar refutó a Newton. Kaufmann, un distinguido físico, refutó la teoría de la relatividad de Einstein el mismo año que fue publicada[8]. Pero todos los programas de investigación que admiro tienen una característica en común. Todos predicen hechos novedosos, hechos sobre los que no se había soñado antes o que han sido contradichos por programas anteriores o rivales. En 1686, cuando Newton publicó su teoría de la gravedad, existían, por ejemplo, dos teorías en boga referente a los cometas. La más

8 Para Lakatos, una refutación es cualquier resultado aparentemente bien fundado que parece ser consistente con una teoría. En los dos casos que menciona -Newton y la Luna, Einstein y los experimentos de los rayos beta de Kaufmann- se demostró posteriormente que las «refutaciones» eran espurias: el desplazamiento de la Luna en realidad no es inconsistente con la Teoría de Newton y los resultados de Kaufmann se debieron a un error experimental. Para información sobre los experimentos de Kaufmann y la reacción de Einstein a estos, véase Arthur I. Miller, (1981) *Albert Einstein's Special Theory of Relativity* (La Teoría Especial de la Relatividad de Albert Einstein) (*Reading, Mass*, Addison.Wesley.

popular consideraba a los cometas como señal de un Dios enojado que advertía que atacaría y causaría desastres. Una teoría poco conocida de Kepler sostenía que los cometas eran cuerpos celestiales que se desplazaban a lo largo de líneas rectas. Ahora, de acuerdo a la teoría newtoniana, algunos de ellos se desplazaban en hipérbolas o parábolas que nunca retornaban, otras se desplazan en elipses ordinarias. Halley, trabajando en el programa de Newton, calculó en base a observación, un breve tramo del paso de un cometa que retornaría en un lapso de setenta y dos años, calculó al minuto cuándo sería visto nuevamente en un punto bien definido del espacio. Esto era increíble. Pero setenta y dos años después, cuando tanto Newton y Halley habían muerto hacía tiempo, el cometa Halley retornó exactamente como Halley lo predijo. De manera similar, los científicos newtonianos predijeron la existencia y el desplazamiento exacto de pequeños planetas que nunca habían sido observados anteriormente. O tomemos el programa de Einstein. Este programa hizo la asombrosa predicción que si uno medía la distancia entre dos estrellas en la noche y si uno media la distancia entre ellas durante el día (cuando son visibles durante un eclipse de sol), las dos medidas serían diferentes. Nadie había pensado hacer tal observación antes del programa de Einstein. Así, en un programa de investigación progresiva, la teoría conduce al descubrimiento de hechos novedosos hasta entonces desconocidos. Sin embargo, en los programas degenerativos las teorías son elaboradas solo para acomodar hechos conocidos. ¿El marxismo, por ejemplo, ha predicho un hecho novedoso exitosamente? ¡Nunca! Tiene algunas famosas predicciones sin éxito. Predijo el absoluto empobrecimiento de la clase obrera. Predijo que la primera revolución socialista ocurriría en las sociedades industrialmente más desarrolladas. Predijo que las sociedades socialistas estarían libres de revoluciones. Predijo que no habría conflicto de intereses entre los países socialistas. Así, las predicciones iniciales del marxismo eran audaces y asombrosas pero fracasaron. Los marxistas explicaron todas sus fallas: explicaron los crecientes estándares de vida de la clase obrera creando una teoría del imperialismo, explicaron incluso por qué la primera revolución socialista ocurrió en la industrialmente rezagada Rusia. «Explicaron» lo de Berlín de 1953, lo de Budapest de 1956, lo de Praga de 1968. «Explicaron» el conflicto ruso-chino. Pero todas las hipótesis auxiliares fueron preparadas después del evento para proteger la teoría marxista de los hechos. El programa newtoniano condujo a hechos novedosos, el programa marxista se colocó tras los hechos y ha estado corriendo presuroso para alcanzarlos.

En resumen. El sello distintivo del progreso empírico no son verificaciones triviales: Popper tiene razón en que hay millones de ellas. No es un éxito para la teoría newtoniana que las piedras, cuando se dejan caer, caen hacia la tierra, no importa con cuánta frecuencia se repita esto. Pero las denominadas «refutaciones» no son el sello distintivo del fracaso empírico, como Popper ha pregonado, ya que todos los programas se desarrollan en un océano permanente de anomalías. Lo que cuenta realmente son las predicciones dramáticas, inesperadas, asombrosas: pocas de ellas son suficientes para inclinar la balanza, *donde la teoría se relega tras los hechos, estamos tratando con miserables programas de investigación degenerativos.*

Entonces, ¿cómo ocurren las revoluciones científicas? Si tenemos dos programas de investigación rivales y uno está progresando mientras el otro está degenerando, los científicos tienden a adherirse al programa progresivo. Esta es la justificación de las revoluciones científicas. Es cuestión de honestidad intelectual guardar consecuencia pública, no es deshonesto mantenerse en un programa degenerativo y tratar de convertirlo en progresivo.

En oposición a Popper, la metodología de los programas de investigación científica no ofrece racionalidad instantánea. Se deben tratar los programas en ciernes indulgentemente: puede que a los programas les tome décadas antes que despeguen y se hagan empíricamente progresivos. La crítica no es una veloz aniquilación popperiana por la refutación. La crítica importante siempre es constructiva: no hay refutación sin mejor teoría. Kuhn se equivoca al pensar que las revoluciones científicas son cambios súbitos, irracionales en la visión. La historia de la ciencia refuta tanto a Popper como a Kuhn: en una inspección estricta tanto los experimentos cruciales popperianos como las revoluciones kuhnianas resultan ser mitos: lo que normalmente ocurre es que los programas de investigación progresivos remplazan a los degenerativos.

El problema de la demarcación entre la ciencia y la seudociencia también tiene serias implicancias para la institucionalización de la crítica. La teoría de Copérnico fue prohibida por la Iglesia Católica en 1616 porque se decía que era seudocientífica. Se le sacó del índice en 1820 porque por aquel entonces la Iglesia consideraba que los hechos la habían probado y, en consecuencia, se volvió científica. El Comité Central del Partido Comunista Soviético en 1949 declaró seudocientífica a la Genética mendeliana e hizo matar a sus defensores, como el Académico Vavilov, en los campos de concentración; después del asesinato de Vavilov la genética mendeliana fue rehabilitada, pero se mantuvo el derecho del Partido de decidir qué era ciencia, qué era publicable, qué era seudociencia y qué era condenable. El nuevo sistema liberal de Occidente también ejercita el derecho de negar la libertad de expresión a lo que se considera seudociencia, como hemos visto en el caso del debate relacionado con la raza y la inteligencia. Todos estos juicios se basaban inevitablemente en alguna clase de criterio de demarcación. Esta es la razón por la cual el problema central de demarcación, entre ciencia y seudociencia no es un seudoproblema de filósofos de gabinete: tiene graves implicancias éticas y políticas.

II. LA INDUCCIÓN

La inducción clásica

La presente lección se propone hacer un estudio de los planteamientos fundamentales que sobre la inducción formuló Stuart Mill (1806-1873) en su conocido libro *Sistema de lógica*. Las referencias que haremos se basan en la versión castellana de Daniel Jorro publicada en Madrid en 1917. La naturaleza misma de nuestra tarea nos ha llevado a elegir aquello que consideramos sustantivo y a desestimar lo que podría ser considerado accesorio o de carácter reiterativo, como, por ejemplo, las diversas y abundantes ejemplificaciones en las que entra con alguna frecuencia Stuart Mill para probar la misma tesis.

Consideramos importante aclarar que en la literatura especializada en lógica matemática es normal que se omita como tema la inducción clásica. Sin embargo, si se revisa los manuales de metodología de la investigación de carácter operativo y de uso actual generalizado, se encontrará que ellos se basan en la lógica Stuart Mill más que en los resultados específicos de la lógica contemporánea. Por ejemplo, la lógica subyacente en los llamados diseños de investigación, ya clásicos, de Campbell y Stanley, no es de manera directa un sistema de lógica matemática sino las reglas decimonónicas de Stuart Mill sobre los casos de causación.

Debido a la consideración anterior, hemos juzgado necesario incluir este capítulo que facilita la comprensión de los manuales sobre investigación científica y que apertura una forma distinta de razonar que en nuestro siglo ha sido perfeccionada a través de los sistemas de lógica probabilitarios.

La presente exposición la hemos dividido en dos partes: la primera referente a la ubicación y fundamentación de la inducción dentro de lo que podríamos considerar una teoría general de la inferencia; y la segunda versa sobre la inducción entendida básicamente como un procedimiento de investigación de los casos de causación. Asimismo, hacemos notar que la segunda parte es la que usualmente se resume en algunos manuales de lógica y metodología bajo la denominación de los métodos de Stuart Mill.

En lo que sigue procedemos a desarrollar el plan antes descrito.

La inducción como inferencia amplificadora

Comenzaremos puntualizando que Stuart Mill define a la lógica como una disciplina cuyo objeto de estudio es la prueba de la verdad de proposiciones o aserciones, lo que se desprende claramente de una lectura del numeral 1 del capítulo primero del libro II de *Sistema de Lógica* (SL). Asimismo, considera que la acción de probar consiste principalmente en hacer inferencias, pero, hasta donde hemos podido constatar, no se esmera en

proporcionar inicialmente una definición explícita, precisa y rigurosa de inferencia sino que prefiere proporcionar un conjunto de nociones a partir de las cuales el lector puede derivar una caracterización de ella.

Entre tales nociones podemos citar la siguiente: «Inferir una proposición de otra proposición previa o de otras; prestarle fe o exigir que se le preste fe como conclusión de alguna otra, es razonar en el sentido más amplio de la palabra» (p. 182). De este texto se sigue que inferir es la operación por la que se desprende o se deriva una conclusión a partir de otra u otras proposiciones, lo cual, en gran medida, coincide con lo que clásicamente se ha dicho al respecto.

Sin embargo, la lectura del numeral 2 revela que Stuart Mill no está pensando exactamente igual que los clásicos aristotélicos porque, en esta parte de su exposición, de manera sumaria, analiza las tradicionales inferencias inmediatas sistematizadas en el cuadro de Boecio y concluye que no son inferencias. La razón es que se trata de equivalencias, de modos distintos de decir lo mismo, esto es, de meras traducciones que como tales solo comportan una modificación en los medios expresivos; pero no en el estado del conocimiento que de esta manera no sufre incremento alguno.

El hecho de que Stuart Mill descalifique como inferencias a operaciones lógicas clásicas, por ser equivalencias, se comprende si se considera que sus planeamientos de manera clara exigen que para que algo pueda ser denominado inferencia debe poseer una conclusión cuya verdad sea nueva con respecto a lo dicho en las premisas. Vale decir, toda inferencia genuina debe producir un proceso de real incremento del conocimiento y en ese sentido debe ser amplificadora. Consecuentemente, de acuerdo con esta concepción, las operaciones realizadas por la lógica no son meros medios de explicitación de lo ya dicho en las premisas sino genuinos instrumentos de descubrimiento de verdades que antes no se conocían.

El fundamento del silogismo

Stuart Mill, inicialmente, distingue dos tipos de inferencias: las que operan de lo particular a lo general, llamadas inductivas, y las que operan de lo general a lo particular, llamadas silogismo o argumentaciones. Al hacer esta clasificación se aparta de las posiciones inductivistas tradicionales, como la de Bacon, que consideraban al silogismo como un procedimiento circular y como una seudoinferencia. En cambio, para Stuart Mill, por definición, el silogismo es una inferencia en sentido estricto porque permite el paso de lo conocido a lo desconocido.

Abundando en detalles argumentativos, afirma que la premisa mayor de un silogismo es una fórmula cuya «intención» condensa un conjunto muy grande de inferencias que proceden de lo particular a lo general, lo que significa que el fundamento de la premisa mayor es su intención inductiva. El silogismo resulta así una inferencia en sentido estricto porque su conclusión no está contenida en la proporción denominada premisa mayor, sino, que es obtenida conforme a su «intención» inductivas que no es lo mismo.

La implicación material, tal como lo sostuvo el obispo Whately y otros filósofos, era de este modo insuficiente para justificar la validez del silogismo, pues Stuart Mill rechaza el

criterio que dice que lo que legitima a una inferencia es la imposibilidad de que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa. El fundamento del silogismo es, en última instancia, la intención inductiva de la premisa mayor. En concordancia con este punto de vista, rechaza la posibilidad de reducir la teoría del silogismo a un formalismo algebraico, lo que en su tiempo, sin embargo, ya había sido logrado por los trabajos de Boole y de Venn.

Con relación a la inducción, Stuart Mill es explícito en su definición como vemos en la siguiente cita: «La inducción por consiguiente, es la operación del espíritu por la cual inferimos que lo que sabemos ser verdadero en uno o varios casos particulares será verdadero en todos los casos que se parezcan a los primeros bajo ciertas relaciones asignables. En otros términos, la inducción es el procedimiento por el cual concluimos que lo que es verdadero de ciertos individuos de una clase es verdadero de toda la clase, o que lo que es verdadero algunas veces, lo será siempre en circunstancias semejantes». (p. 292).

En esta definición se aprecia claramente el carácter amplificatorio asignado a la inducción, pues la verdad de la conclusión afecta a más casos que los incluidos en las premisas. Pero esto no debe llevarnos a pensar que el sentido de esta inferencia es establecer una relación que va del presente al futuro (predictiva), en la medida que muchos de los casos referidos por la conclusión puedan coexistir con los descritos por las premisas con la diferencia de que en un determinado momento todavía no son conocidos. Consecuentemente, lo fundamental en todo proceso inductivo, como en cualquier inferencia, es proceder de lo conocido a lo desconocido.

Las seudoinducciones

En armonía con el planteamiento anterior, nuestro autor considera necesario señalar tres tipos de seudoinducciones debido a que son tenidas como inferencias genuinas por algunos tratadistas.

El primer tipo de seudoinducción es lo que hoy día podemos llamar inducción exhaustiva, caracterizada porque en las premisas se agotan los casos del universo del discurso o lo que hemos denominado antes dominio de interpretación y, por consiguiente, la conclusión no puede agregar ninguno más, convirtiéndose así en una escritura abreviada de las premisas. Evidentemente, los procedimientos de este tipo no satisfacen la definición de inferencia adoptada por Stuart Mill, pues la conclusión no excede lo dicho en las premisas.

El segundo tipo de seudoinducciones lo constituyen las demostraciones por inducción matemática. Es oportuno anotar que en este caso Stuart Mill da muestras de no conocer las diferentes formas que puede adoptar la inducción matemática, a pesar de que se trata de un método conocido desde los trabajos de Pascal. La base de su error consiste en que confunde las leyes de la matemática con las leyes de la naturaleza; así por ejemplo, identifica las leyes de la geometría con las leyes del espacio real, desconociendo que ya en su tiempo estaban desarrolladas las geometrías no-euclidianas de Lobachevski y Riemann, cuya correspondencia con el espacio real no tenía ningún significado matemático.

El tercer tipo de seudoinducción está constituido por las llamadas coligaciones que, según Stuart Mill, no son propiamente inferencias sino solamente descripciones que se reducen

a los casos observados y que, consecuentemente, no dicen nada acerca de los casos no observados. Las coligaciones se limitan a ser descripciones de concordancia que se observan en la naturaleza, como sería el caso de las llamadas leyes de Kepler sobre las órbitas de los planetas. De acuerdo a Stuart Mill, estas leyes enuncian relaciones constantes o uniformidades observadas pero no permiten un conocimiento mayor debido a que no establecen las causas. En cambio, las inducciones hacen referencia a regularidades observadas, pero también, hacen afirmaciones acerca de hechos nuevos que exceden en contenido a las coligaciones.

Después de examinar las seudoinducciones, señalaremos que lo importante para Stuart Mill no es solamente hacer inducciones genuinas sino ser capaz de escoger aquellas que son relevantes para probar algo con respecto a ciertos objetos. Las reglas de la lógica nos sirven para determinar la validez de las inducciones una vez que estas han sido creadas, sin embargo son de poca ayuda para crear las inducciones que necesitamos. Esta tesis, con ligeras variantes, ha sido defendida en nuestro siglo por el positivismo lógico y también por Popper, entre otros.

El principio de uniformidad de la naturaleza

El fundamento de la inducción, según Stuart Mill, está dado por el principio de uniformidad de la naturaleza, el cual está presupuesto en toda inferencia de este tipo. En efecto, la generalidad inherente a toda conclusión obtenida por métodos inductivos solo es posible si se asume como principio que en circunstancias semejantes la naturaleza se comporta de la misma manera. Stuart Mill expresa esta idea en los siguientes términos. «Es preciso ante todo observar que hay un principio implicado en el enunciado mismo de lo que es la inducción, un postulado relativo al curso de la naturaleza y al orden del universo, a saber: que hay en la naturaleza casos paralelos; que lo que sucede una vez sucederá también en circunstancias bastantes semejantes, y sucederá siempre que las dichas circunstancias se presenten».

Pero afirmar que el principio de uniformidad de la naturaleza es el fundamento de la inducción no significa en modo alguno, para Stuart Mill, aceptar algunas tesis tradicionales que veían en dicho principio la expresión de una especie de tendencia instintiva a inducir, que supuestamente era inherente a la naturaleza humana. Sostuvo que el fundamento de este principio también es inductivo en la medida que lo adquirimos como una especie de generalización suprema de nuestra experiencia. Por tanto, no constituye una de nuestras inducciones más simples y más primigenias sino, más bien, se encuentra en el rango de ser la más elaborada. Esto explica, que el enunciado de dicho principio prácticamente haya sido accesible solo al espíritu entrenado de los filósofos, que han sido capaces de derivarlo de otras generalizaciones de menor jerarquía. En efecto, sería la constatación de que en los diversos órdenes de la naturaleza existen leyes científicas que expresan relaciones uniformes y constantes respecto de fenómenos de un cierto género, lo que habría conducido a los filósofos a pensar que las diversas regularidades conocidas solo son la manifestación de una regularidad y uniformidad universal inherente al comportamiento de la naturaleza como un todo. El proceso del razonamiento ha sido inductivo, sostiene Stuart Mill, en tanto se ha inferido que en todos los nuevos fenómenos que se conozcan, la naturaleza observará un comportamiento uniforme, consistente en que condiciones semejantes serán seguidas por efectos semejantes.

Premisa mayor de un silogismo inductivo

Evidentemente, el planteamiento anterior abre inmediatamente una interrogante crucial, ¿cómo es posible que un principio, que ha sido obtenido presuponiendo un número muy grande de inducciones, sirva de fundamento a la inducción? La respuesta de Stuart Mill es que el principio de uniformidad de la naturaleza es el fundamento de la inducción, no en el sentido de que a partir de él se construyan todas las inducciones, porque esto es claramente falso, sino en el sentido de que este principio constituye la justificación lógica que hace legítima a toda inferencia inductiva. Y esta justificación consiste en que él guarda con las inferencias inductivas la misma relación que la premisa mayor con un silogismo. Por consiguiente, el mencionado principio es fundamento no porque sirva para explicar las inducciones sino porque es condición necesaria para la prueba de su justificación lógica, puesto que de acuerdo a las reglas clásicamente conocidas no hay conclusión legítima si es que no hay una premisa mayor en cual fundarla.

Este punto de vista, que luego no recibe un tratamiento detallado y sistemático, está presente de manera implícita y a veces explícita en el desarrollo de la inducción que hace Stuart Mill especialmente en el libro III de *Sistema de lógica*. Su importancia radica en que nuestro autor no cayó en la tradición baconiana de oponer deducción a inducción pues, como resulta claro de lo dicho anteriormente, la inducción es lógicamente válida solamente porque puede ser formulada en los términos de un silogismo válido cuya premisa mayor es el principio de uniformidad de la naturaleza. Aunque Stuart Mill no lo afirma con suficiente claridad, su posición implica lógicamente que la inducción es un caso particular de silogismo en la medida que, de acuerdo con sus tesis, toda inducción puede ser traducida a la forma de un silogismo que tiene como premisa mayor al principio de uniformidad de la naturaleza. Sin embargo, no todo silogismo tiene que ser necesariamente inductivo en el sentido de que puede tener una premisa mayor distinta.

Leyes de la naturaleza y sistema axiomático

Consecuentemente, para que la lógica inductiva sea posible, deben existir previamente premisas mayores que permitan justificar las inferencias, y por tanto, es necesario para construir este tipo de lógica postular la existencia de ciertas inducciones básicas y universales, análogas al principio de uniformidad de la naturaleza, que ya no se justifican dentro del sistema de la lógica inductiva sino que lo hacen posible. Asimismo, si somos más exactos, el mencionado principio debe ser entendido como una pluralidad de uniformidades más que como una sola. Se trata más bien de una conjunción de las uniformidades que se dan separadamente en los diferentes fenómenos que acaecen. De otra parte, entre esta multitud de uniformidades puede distinguirse aquellas que son primitivas e irreductibles y aquellas que resultan como una combinación de las premisas y que son, por tanto, reducibles a sus componentes básicos. Según Stuart Mill, solamente las uniformidades que son irreductibles pueden llamarse propiamente leyes de la naturaleza y aquellas que son derivadas, como serían las de Kepler, son meras concordancias que pueden ser derivadas de proposiciones más simples como las leyes de Newton. Consecuentemente la investigación de las leyes de la naturaleza consiste en tratar de responder a la siguiente pregunta: «¿Cuál es el número mínimo de proposiciones generales desde las cuales podrían ser inferidas deductivamente todas las uniformidades de la naturaleza?».

Como puede comprenderse, esta manera de plantear la investigación de las leyes de la naturaleza coincide con el proceso de construcción de un sistema hipotético-deductivo de proposiciones, conocido tradicionalmente como sistema axiomático, en el que a partir de un número mínimo de axiomas se derivan las otras proposiciones como teoremas. Este modelo de investigación científica, que tiene su origen en los *Elementos* de Euclides, fue tradicionalmente usado para ejemplificar un método deductivo que se entendía como opuesto al inductivo. Sin embargo, en Stuart Mill encuentra una especie de conciliación con los planteamientos inductivistas, pues aunque el desarrollo del sistema es deductivo y consiste en «silogizar», la naturaleza de los axiomas es la de inducciones básicas e irreductibles que constituyen las uniformidades primarias de la naturaleza. En el logro de esta comprensión no-baconiana del proceso de desarrollo y organización de la ciencia, indudablemente influyó la posibilidad que tuvo Stuart Mill de conocer la versión axiomática de la mecánica debida a Newton. Esta presunción resulta completamente plausible cuando se constata que a lo largo de la obra estudiada abundan los ejemplos tomados de los *Principios de matemática aplicados a la filosofía natural.*

Asimismo, aunque podría ofrecerse abundantes argumento para apoyar la interpretación de que Stuart Mill consideró al modelo hipotético-deductivo como el paradigma hacia el cual debería tender la organización de la ciencia, consideramos que será suficiente aportar la siguiente cita, cuya claridad y comprensión nos exime de hacer mayores comentarios: «Así no hay que desesperar de elevar la química y la fisiología al rango de las ciencias deductivas, pues aunque sea imposible deducir todas las verdades químicas y fisiológicas de las leyes o principios de las sustancias simples o agentes elementarios, podrían ser deducidas de las leyes que aparecen cuando estos elementos se reúnen en un pequeño número de combinaciones no muy complejas».

La ley de causalidad

Stuart Mill divide en general los fenómenos, en sincrónicos y diacrónicos. Las leyes de los fenómenos sincrónicos son las referentes al número y a la figura, esto es, son las leyes de la aritmética y de la geometría que, como dijimos antes, él les otorgó el mismo estatuto que a las demás leyes de la naturaleza. Al hacer esta tipificación sin embargo, no pudo dejar de notar que las leyes de la aritmética pueden ser intuitivamente entendidas con referencia a la sucesión de los números naturales y, consecuentemente, pueden fácilmente, por este hecho, ser calificadas de leyes de fenómenos diacrónicos. Debido a ello, concedió que las leyes del número se cumplen también en los fenómenos sincrónicos además de en los diacrónicos, mientras que las de la geometría, que están referidas a las propiedades del espacio, se limitarían a los fenómenos sincrónicos. Pero como, además, las características de las leyes de lo sincrónico puede ser establecidas sin necesidad de presuponer el transcurso de un intervalo de tiempo, las leyes de ambas ciencias pueden también ser entendidas como intemporales y como establecidas universalmente de una sola vez para siempre.

De manera análoga, los fenómenos diacrónicos tienen a su vez una ley fundamental que es privativa de ellos porque su verdad presupone necesariamente la noción de sucesión temporal. Esta ley, que es una de las pocas que gozan del mismo grado de universalidad que las verdades matemáticas, es la de causalidad. Stuart Mill expresa esta idea de la manera siguiente: «Esta ley, sin embargo, es universal también en otro sentido; es coextensiva con

el campo entero de los fenómenos, pues todos los hechos de sucesión son ejemplos de ella. Esta ley es la ley de causalidad. Es verdad de que todo lo que comienza a ser tiene una causa que es coextensiva a toda la experiencia humana».

La cita anterior, además de revelarnos la universalidad que nuestro autor atribuyó a la causalidad, nos proporciona una enunciación muy general de dicho principio, al cual dedicaremos algunas líneas más. Este proceder se justifica porque, según el pensamiento examinado, la noción de causa es la «raíz de toda la teoría de la inducción» (p. 325). En consecuencia, una comprensión correcta de la lógica inductiva clásica requiere que precisemos cuatro aspectos de la noción de casualidad a los que Stuart Mill otorga especial atención.

Aspectos de la causalidad

(i) En principio, para Stuart Mill, una causa no es simplemente un evento sino una conjunción de condiciones que producen un efecto o que son seguidas por un efecto, de tal suerte que si tal conjunción de condiciones se repite, se seguirá necesariamente el mismo efecto.

(ii) La referida conjunción de condiciones, sin embargo, no tiene que ser hecha explícita completamente siempre, pues en la práctica resulta suficiente enumerar solo las condiciones más *relevantes* y muchas pueden ser omitidas en la formulación sin mayor dificultad.

Simultáneamente, con la conjunción de condiciones que son seguidas de un cierto efecto, pueden darse algunas *condiciones contrarias*. Para incluir este caso, la causa en sentido general es definida como la suma algebraica de las condiciones positivas y negativas «el total de las contingencias de toda naturaleza, que siendo realizadas, hacen que siga el consiguiente de toda necesidad» (p. 332).

(iii) Aunque una relación de causalidad establece una relación de invarianza o uniformidad, la causalidad es mucho más que esta última, es además una relación *incondicionada*. Un ejemplo de relación invariante es la sucesión del día y la noche que se produce uniformemente en el tiempo, sin embargo, no es una relación de causalidad porque todos sabemos que el día no es la causa de la noche ni viceversa. Más bien ambos fenómenos tienen una causa común en el movimiento de la Tierra alrededor del Sol. La relación de causalidad, según Stuart Mill, es incondicionada en el sentido de que la relación entre la causa y el efecto es necesaria en todas las circunstancias imaginables y, por tanto, para explicar el efecto siempre será suficiente recurrir a su antecedente y no a otro elemento ajeno a la sucesión, lo que es necesario en el caso de la secuencia establecida por el día y la noche. Consecuentemente, mientras toda relación de causalidad es una relación de uniformidad, no toda relación de uniformidad o de invarianza es una relación de causalidad, con lo que se estatuye que la relación de causalidad es un caso particular muy importante, dentro del conjunto de las relaciones de invarianza.

A partir de la distinción anterior, Stuart Mill deduce los casos en los que un método establece una inducción completa y los casos en los que esto no es posible. Un método conduce al logro de una inducción completa cuando permite la determinación de una relación incondicionada. Si solo permite la determinación de una relación de invarianza o concor-

dancia, entonces no aporta una inducción completa en la medida que no nos permite asociar inequívocamente una causa con su efecto y viceversa.

(lv) Según Stuart Mill la relación de causalidad es, en general, aditiva en el sentido de que el efecto total de un conjunto de causas es igual a la suma de los efectos que producirían estas por separado. Esta relación es análoga a la de composición de fuerzas en la mecánica, en la cual la resultante de la aplicación de un conjunto de fuerzas es igual a la suma de los efectos que estas producirían por separado (la suma es aquí obviamente entendida en sentido algebraico puesto que unas causas pueden actuar en sentido distinto o contrario a las otras, tal como ocurre con las fuerzas). Excepcionalmente, según Stuart Mill la causalidad no es aditiva, en el sentido de que el efecto total de un conjunto de causas no es igual a la suma de los efectos que estas producirían por separado. En este caso, el todo es algo más que la suma de las partes y tiene leyes que difieren de las que gobiernan las partes tomadas aisladamente. Es el caso de la química y de la fisiología que por esta razón están constituidas por leyes que Stuart Mill llama *heteropáticas*. En la imposibilidad de reducir las leyes de la Química a las de sus componentes más simples, radicaría el origen de la dificultad para lograr una presentación axiomática de esta disciplina.

Los métodos de Stuart Mill

Realizadas las delimitaciones anteriores sobre la noción de causalidad, en lo que sigue pasaremos a exponer los métodos de Stuart Mill cuyo objetivo es «determinar cuáles son las leyes de causación existentes en la naturaleza, determinar los efectos de cada causa y las causas de todos los efectos» (p. 355).

Para exponer los métodos será conveniente que previamente establezcamos algunas convenciones de notación. Las causas las denotaremos con las letras mayúsculas **A, B, C, D**,... etc. y sus efectos respectivos con las correspondientes minúsculas **a, b, c**,... etc. Usaremos una flecha que en este trabajo es solo una manera abreviada de decir «*desde... se sigue...* », lo cual no debe confundirse ni con la noción de implicación lógica ni con el nexo casual. Cuando la flecha deba expresar además de «*desde... se sigue...*» un nexo causal, lo indicaremos al costado entre paréntesis.

El método de la concordancia

El enunciado del método de la concordancia propuesta por Stuart Mill es el siguiente:

«Si dos o más fenómenos objeto de la investigación tienen solamente una circunstancia común, la circunstancia en la cual todos los casos concuerdan es la causa (o el efecto) del fenómeno» (p. 369).

El enunciado anterior nos conduce a una inferencia de la siguiente forma:

$$\mathbf{A, B, C, \rightarrow a, b, c.}$$

$$\mathbf{A, D, E, \rightarrow a, d, e.}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Luego $\mathbf{A \rightarrow a}$

La inferencia anterior nos indica que siempre que sucede **A** también ocurre **a**, pero para ser válida requiere que entre los conjuntos de circunstancias **ABC** y **ADE** deba haber solamente una circunstancia común porque si además de **A** hubiera otra implícita, entonces cualquiera de las dos podría ser la causa. De haber más de una circunstancia en común, **A** seguiría siendo un antecedente de **c**, como lo es el día de la noche, pero no necesariamente la causa.

El método de la concordancia no proporciona inducción completa, en la medida que no existe ningún procedimiento seguro para decidir si dos conjuntos de circunstancias tienen solamente un elemento en común. Asimismo, al no permitirnos identificar de manera unívoca la causa, no es aparente para la experimentación, pues ella exige que seamos capaces de producir un efecto lo que no es posible sin el conocimiento unívoco de su causa. Consecuentemente, este método solo permite el establecimiento de relaciones de invarianza, lo que reconoce claramente Stuart Mill en el siguiente texto: «El método de concordancia no conduce más que a las leyes de los fenómenos (como se les llama a veces, pero impropiamente, pues que las leyes de causalidad son también leyes de los fenómenos), es decir, a uniformidades que, o no son leyes de causación, o respecto de las cuales la cuestión de la causalidad puede por el momento quedar» (p. 373).

Sin embargo, es importante señalar que nuestro autor considera que en ciertas condiciones que exigen reiteradas variaciones de las circunstancias y el uso de métodos adicionales, la concordancia puede permitirnos establecer relaciones de causalidad. Aquí la cuestión radica en el número de variaciones de las circunstancias necesitado y el número de concordancias que es significativo para pensar que un antecedente es además una causa. Esta problemática puede ser respondida por el cálculo de las probabilidades a través de la noción de frecuencia relativa. Para Stuart Mill el gran auxilio en este caso es el desarrollo realizado por Laplace en su *Ensayo filosófico sobre la probabilidad*, regla sexta, que aparece ampliamente comentada en el Cap. XVIII, numeral 5, del libro III de *Sistema de lógica*. Lo que aquí ha expuesto Stuart Mill no es otra cosa que los fundamentos del conocido teorema de Bayes para averiguar la probabilidad de una causa. El razonamiento que justifica este recurso según nuestro autor es que es mejor recurrir a la probabilidad para determinar una causa que pensar que ciertos acontecimientos se producen por una especie de coincidencia maravillosa que supera en mucho las leyes del azar. Consecuentemente, cuando se usa el método de la concordancia variando muchas veces las circunstancias y se encuentra una uniformidad que excede mucho las reglas del azar, tal como fueron definidas por Laplace, entonces hay que pensar que esta uniformidad o invarianza es además una relación de causalidad.

Método de la diferencia

La enunciación que Stuart Mill da del método de la diferencia es la siguiente: «Si un caso en el cual el fenómeno se presenta y un caso en el que no se presenta tienen todas las circunstancias comunes, fuera de una sola, presentándose esta solamente en el primer caso, la circunstancia única en la cual difieren los dos casos es el efecto o la causa, o parte indispensable de la causa del fenómeno» (p. 370).

Esta regla conduce a una inferencia del siguiente tipo:

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{A, B, C, \rightarrow a, b, c.}\\ \mathbf{B, C, \rightarrow b, c.}\end{array}}{\text{Luego} \qquad \mathbf{A \rightarrow a} \qquad \text{(desde } \mathbf{A} \text{ se sigue causalmente } \mathbf{a}\text{)}}$$

Esta inferencia según Stuart Mill nos proporciona inducción completa porque el hecho de que en dos circunstancias semejantes que figuran como premisas la presencia de **A** da lugar al efecto **a** y la ausencia de **A** conlleve la desaparición del mencionado efecto, nos autoriza a concluir que la causa del efecto **a** es la circunstancia **A**. Este resultado, asimismo, nos pone en condiciones de producir y suprimir el efecto **a** en la medida que conocemos su causa, razón por la que el método de la diferencia es considerado como el adecuado a la investigación experimental mientras que el de la concordancia es restringido a los casos en lo que es factible solo la observación.

Stuart Mill considera que este método es conclusivo porque es posible decidir con seguridad cuando dos situaciones se diferencian solamente en una condición sin importar que tengan más puntos de coincidencia de los que ya tenemos enumerados. Desde su punto de vista es más fácil controlar las diferencias que las semejanzas, pues nosotros podemos introducirlas experimentalmente en forma tal que, por ejemplo, el estado de un perro en el momento **M** es el mismo que en el momento **M'** con la diferencia única de que en **M'** hemos puesto un trozo de carne ante su vista. De esta manera, si se produce salivación, ella debe ser causada por el factor introducido y esto se ratifica cuando comprobamos que después que retiramos la carne la salivación cesa.

Actualmente se sabe que es más fácil controlar las diferencias manteniendo constantes ciertas condiciones, sin embargo, tampoco hay ninguna regla que nos asegure completamente que la única diferencia entre dos estados es la que nosotros hemos introducido, pues bien podría haberse producido una sin que nos percatemos de ella. Consecuentemente, aquí la inferencia también es de probabilidad, aunque nuestro autor no haya recomendado el cálculo de las probabilidades en este caso. Sin embargo, es evidente que este tipo de inferencia, cuando es posible, es el más compatible con los diseños experimentales que buscan un control óptimo de las variables consideradas en una investigación. Los metodólogos contemporáneos han prestado especial atención a esta regla y al componente diferencial **A** la denominan variable experimental.

Método indirecto de la diferencia

El enunciado de este método es el siguiente: «Si dos casos o más en los cuales se presenta el fenómeno tienen una sola circunstancia en común, mientras que dos casos o más en los cuales no se presenta no tienen más en común que la ausencia de esta circunstancia, la circunstancia por la cual únicamente difieren los dos grupos de casos es el efecto, o la causa, o una parte necesaria de la causa del fenómeno» (p. 376).

Este método es una combinación de los anteriores, se trata de dos grupos de concordancias que pueden ser distinguidos porque tienen diferente elemento común. En el primer grupo el elemento común es una circunstancia **A** y el segundo el elemento común es la circunstancia **no-A**, esto es la ausencia de la circunstancia anterior. Vale decir, al interior de los dos pares de grupos hay concordancia y al exterior de ellos diferencia por un solo factor. La forma de la inferencia es como sigue:

	A, B, C, D,	⟶	a, b, c, d,
	A, F, G, H,	⟶	a, f, g, h,
	no – A, B, C, D	⟶	b, c, d,
	no – A, F, G, H	⟶	f, g, h,
Luego	A	⟶	a

Según Stuart Mill este método debería proporcionar inducción completa pues los dos grupos al presentar solo una variante permitirían aplicar el método de la diferencia que es conclusivo. Sin embargo, su debilidad estaría en que cada grupo tomado aisladamente es un caso de concordancia y este no es un método conclusivo.

Método del residuo

El enunciado de este método es el siguiente: «Separad de un fenómeno la parte que se sabe, por inducciones anteriores, es el efecto de ciertos antecedentes restantes» (p.379).

Esta regla nos conduce a una inferencia de la forma:

$$\mathbf{A, B, C, \rightarrow a, b, c,}$$

Por inducciones anteriores se sabe que

	A	⟶	a
	B	⟶	b
Luego	C	⟶	c

Como es claro, esta es una variante del método de la diferencia. Lo distintivo de este caso es que recurre a inducciones anteriores como premisas, mientras que en todos los casos anteriores se supone que las premisas son registros inmediatos de observaciones. Obviamente, la confiabilidad de este método depende de la confiabilidad con que hayan sido obtenidas sus premisas. Si ellas han sido obtenidas por el método de la diferencia y se está seguro de que **C** es el único antecedente de **c**, entonces según Stuart Mill, el método es conclusivo. Sin embargo, él mismo reconoce que es muy difícil llegar a estar seguro de que **C** es el único antecedente de c por lo que no afirma que en general el método del residuo aporte una inducción completa.

A este método frecuentemente se le ha llamado deductivo por su forma, pues presenta la estructura de una premisa mayor general y premisas particulares de las que se concluye también una proposición particular. Esto no afecta la posición de Stuart Mill, porque él no hace inconciliables inducción y deducción y, por otro lado, el hecho de que algo se concluya para un caso, según Stuart Mill, no significa que la conclusión necesariamente es particular, pues si la inferencia ha sido correcta, lo que es verdad de un caso lo es también de todos los de su género. Según Stuart Mill la enumeración no siempre es necesaria en la inducción ni lo más importante, pues lo fundamental es como se eligen los casos. A veces puede ser suficiente un caso, como lo indica en el siguiente texto: «Cuando un químico anuncia la existencia de una sustancia nuevamente descubierta y de sus propiedades, si tenemos confianza en su exactitud estamos seguros de que sus conclusiones deben valer universalmente, aunque su inducción no se funde más que en un solo hecho» (p.313).

Método de las variaciones concomitantes

El enunciado de este método es el siguiente: «Un fenómeno que varía de cierta manera, siempre que otro fenómeno varía de la misma manera, es o una causa o un efecto de este fenómeno, o está ligado a él por algún hecho de causación» (p. 382). Para representar la inferencia a que da lugar esta regla, introduciremos la notación **v (A)** que es una abreviación de la expresión *variación de A...*

A, B, C ⟶ a, b, c, d,

v (A), B, C ⟶ v (a), b, c

Luego, A ⟶ **a** (de **A** se sigue causalmente **a**)

En la interpretación que hemos hecho de la regla de Stuart Mill hemos presupuesto, legítimamente, a nuestro juicio, que la introducción de una variación en una condición antecedente se hace manteniendo constantes todas las demás condiciones para poder sentirnos autorizados a atribuir la variación en el efecto a este hecho y no a otro. Según Stuart Mill, la

proposición que sirve de base a este método es la siguiente: «Una cosa cuyas modificaciones tienen siempre por consecuentes las modificaciones de un efecto debe ser la causa (o debe estar ligada a la causa) de este efecto» (p. 384).

Nuestro esquema lo que expresa es que si **A** es un antecedente de **a** y una variación de **A** es seguida por una variación de **a**, entonces **A** es la causa de **a**. La única limitación que señala nuestro autor a esta inferencia es la mayor o menor posibilidad de observar las variaciones; siempre que tal observación pueda hacerse, la inferencia es conclusiva, esto es, da inducción completa.

Como puede apreciarse, este método para llevarse a la práctica necesita algún tipo de medida o de cuantificación de las variaciones lo que propicia la matematización de la inferencia. Lo que propiamente se establece aquí, es una relación de funcionalidad que bien puede ser directa o inversa. Será directa si a mayores valores de **A** corresponden mayores valores de **a** y a menores valores de **A** corresponden menores valores de **a**. Será inversa si a mayores valores de **A** corresponden menores valores de **a** y a menos valores de **A** corresponden mayores valores de **a**. En la investigación en ciencias humanas de nuestros días se usa frecuentemente un esquema parecido a este que es expresado a través del método estadístico de la correlación, solamente que a esta no se le considera siempre reveladora de causalidad, salvo cuando la relación entre **A** y **a** es claramente asimétrica y tiene sentido, además, afirmar que **A** produce o genera **a**.

La deducción

Stuart Mill declara que los cuatro métodos anteriores son los únicos métodos inductivos que él conoce y puede imaginar. Ciertamente no está contando al tercero que es una combinación de los dos primeros. Todo lo que queda fuera de ellos es la deducción de la cual ya dimos una idea en la parte introductoria. Sin embargo, puede encontrarse otra caracterización de la deducción, un tanto más general, que la define como un método que está constituido por tres partes: la inducción, el razonamiento y la verificación. A la deducción así definida se le asigna un rol preponderante en la ciencia. En sus palabras: «Al método deductivo así definido en sus tres partes constituyentes: la inducción, el razonamiento y la verificación debe el espíritu humano sus más brillantes triunfos en la investigación de la Naturaleza. Le debemos todas las teorías que reúnen fenómenos numerosos y complicados bajo algunas leyes simples, que, consideradas como leyes de estos fenómenos, no habrían podido nunca ser descubiertas por el estudio directo» (p. 439).

Hemos creído pertinente citar el texto anterior, para indicar cómo para Stuart Mill, con toda claridad, la inducción solo tenía sentido dentro del marco de la deducción, aunque los axiomas de los sistemas deductivos sean obtenidos inductivamente, razón por la que la inducción es la primera fase de la deducción. De esta manera, la lógica es entendida como una teoría de la prueba a través de inferencias deductivas, las mismas, que cuando tienen como premisa mayor una proposición sobre uniformidades de la naturaleza, se llaman inducciones.

Lo anterior corrobora fuertemente la afirmación que hicimos anteriormente en el sentido de que Stuart Mill constituye un antecedente muy claro de la tesis contemporánea que concibe

a las teorías científicas como sistemas hipotéticos-deductivos de enunciados contrastables. En efecto, inscribir la inducción dentro de un proceso deductivo más complejo, como un momento de él, no es otra cosa que asignarle en la práctica científica la fase constituida por la postulación de hipótesis o conjeturas de las que hay que obtener consecuencias observables (proceso de razonamiento) para luego someterlas a contrastación (verificación).

Es ciertamente un mérito de Stuart Mill el haber establecido las bases del llamado modelo hipotético-deductivo, el que es uno de los ejes sobre los que ha girado la discusión epistemológica en los últimos sesenta años. Evidentemente, el modelo hipotético deductivo como método de trabajo científico existe desde la época de los *Elementos* de Euclides, en la forma de método axiomático, pero su conceptualización filosófica y su uso como criterio de cientificidad son logros relativamente recientes.

Es la conjunción del aporte de Stuart Mill y del desarrollo frondoso de la lógica matemática en nuestro siglo, lo que ha posibilitado que la tradicional oposición entre inducción y deducción sea resuelta en términos de la teoría de la probabilidad, recibiendo a su vez un tratamiento hipotético deductivo que circunscribe la discusión a la naturaleza de las probabilidades básicas.

Resultados de la inducción clásica

1. La tesis de S. Mill que caracteriza la inferencia, en sentido estricto, como la operación lógica en la que el contenido cognoscitivo de la conclusión excede al de las premisas remite la identificación de una inferencia inductiva, en últimas instancia, a la medida de la cantidad de información que portan las premisas y la conclusión. Este recurso, aun considerando los aportes de la moderna teoría de la información, tiene grandes dificultades para lograr resultados precisos y la mayor de ellas, la única definición disponible de cantidad de información es la de Shannon, pero no es aplicable a esta discusión en la medida que el concepto de conocimiento no es reducible al concepto de información de Shannon que carece de componentes semánticos. Parece ser que la pretensión de Stuart Mill se limitó a que las reglas de deducción en un sistema lógico dado solo deban permitir el paso lógicamente necesario desde un conjunto de fórmulas **P** (consideradas como premisas o axiomas) a un conjunto de fórmulas **C** (consecuencias); pero no el proceso recíproco. Sin embargo, esta propiedad no parece autorizar de manera precisa ninguna estimación fundada sobre la cantidad de información de los referidos conjuntos de fórmulas. Lo que sí queda a salvo es la idea del desarrollo deductivo y, por tanto, de la superación, al menos, de la circularidad formal.

2. La tesis de nuestro autor que afirma que una inducción solo es fundada y válida cuando puede ser formulada como un silogismo en el que la premisa mayor es el principio de uniformidad de la naturaleza, es claramente incorrecta, Esto excluiría del tratamiento lógico de la ciencia a todas las propiedades expresables como predicados de grado 2 o mayores que 2. Afortunadamente, en este aspecto y en otros conexos, la evolución de los hechos ha sido muy distinta a la que Stuart Mill previó. Asimismo, esta tesis presupone que existen premisas mayores o inducciones básicas que propiamente no pertenecerían al sistema de proposiciones inductivamente probadas sino que lo hacen posible. La justificación de estas, también llamadas uniformidades básicas, sigue siendo problemática.

3. El planteamiento directo de la lógica inductiva como un conjunto de métodos para investigar los casos de causación es probablemente uno de los aspectos más rescatables del pensamiento de Stuart Mill y que de hecho ha tenido una acusada influencia entre los metodólogos de nuestro siglo. Sin embargo, dentro de la filosofía epistemológica contemporánea este aporte incidiría directamente en lo que se ha denominado contexto del descubrimiento y gravitaría menos sobre el llamado contexto de la justificación. Asimismo, como en gran medida la discusión filosófica hasta aproximadamente 1960 ha sido sobre el contexto de la justificación lógica, la atención que en los círculos epistemológicos han merecido los métodos de Stuart Mill, orientados más hacia la producción de conocimiento, no ha sido de mayor significación.

4. La relación de causalidad es para Stuart Mill en general aditiva, pero las excepciones que él señala para la química, la fisiología así como las ciencias humanas, que estarían constituidas por leyes *heteropáticas*, esto es, no aditivas, tienen especial significación porque tal análisis es una interesante aproximación a las dificultades, actuales, para usar métodos métricos, particularmente, en ciencias humanas, pues, en otras áreas, como la química, la dificultad ha sido superada.

5. A pesar de que Stuart Mill estuvo dedicado al cultivo de la lógica, se aprecia en su pensamiento grandes dificultades para reconocer la peculiar naturaleza de la lógica y de la matemática respecto de la de las ciencias naturales. Asimismo parece que desconoció o no concedió la debida importancia a aportes de su época como los de Boole, Venn y las geometrías no-euclidianas. Posiblemente ese desconocimiento lo llevo a privilegiar al silogismo otorgándole posibilidades que no tenía o negándole otras que sí tenía, como su expresión algebraica. Lo que sí es rescatable, en este aspecto, es su concepción de la lógica como una disciplina dedicada al estudio de la prueba de la verdad de las proposiciones.

6. Tal vez el aporte mayor de *Sistema de lógica* es que echa las bases para la construcción del modelo hipotético-deductivo como categoría central para el análisis de la ciencia. Esto permitió superar el tradicional antagonismo entre inducción y deducción dentro de un marco más general e integrador que es el de la teoría de la probabilidad. También ha permitido resolver las insuficiencias de la inducción enumerativa, en cualquiera de sus formas, introduciendo el criterio de relevancia en la investigación de los casos de causación. Podría afirmarse que el aporte del sector neopositivista de la filosofía epistemológica contemporánea, con algunas excepciones importantes, ha consistido básicamente en una profundización de la óptica hipotético-deductiva de Stuart Mill a través del uso de aparatos formales lógico-matemáticos y de categorías e instrumentos de carácter semántico.

Acontecimientos y eventos

1.0 Hemos indicado que nuestra investigación filosófica sobre el significado de *probabilidad* está ligada al examen de los modelos de los sistemas axiomáticos de probabilidad. Para tratar este asunto con el debido detenimiento definiremos previamente algunos términos a fin de darles sentido unívoco dentro de la presente exposición.

Aunque habitualmente se usa la palabra «hecho» suponiendo que existe acuerdo sobre cuál es su significado, nosotros preferimos evitarla a causa de que puede dar lugar a ambigüedades. Nos referimos directamente a acontecimientos y a eventos en el sentido a continuación explicado, que hemos tomado, salvo algunas ligeras variantes, de *La Lógica de la investigación científica* de Karl Popper[9]. Iniciaremos nuestra explicación con el siguiente ejemplo:

(a) Al lanzarse el dado Y sobre la mesa de juego de la casa N° 10 de la calle 15 de la ciudad de Lima, a las 3 p.m. del 2 de febrero de 1970, se obtuvo un as.

Diremos que tal enunciado **(a)** es de la forma $\mathbf{p}_k$, de tal manera que el subíndice **k** denota a un nombre de individuo, coordenadas espacio temporales y un atributo. En este caso, **k** denota: (1) al nombre **Y**; (2) la dirección y la ciudad; (3) la fecha y la hora; (4) el atributo de ser un as. Es claro que un enunciado de la forma $\mathbf{p}_k$ es singular.

Con la expresión $\mathbf{A}_k$ nos referimos a la clase de todos los enunciados lógicamente equivalentes a $\mathbf{p}_k$ y llamaremos a esta clase el acontecimiento $\mathbf{A}_K$. Los matemáticos llaman a A_K una clase de equivalencia y a $\mathbf{p}_K$, que lógicamente pertenece a $\mathbf{A}_K$, lo denominan elemento representativo de dicha clase.

Para precisar el sentido en el que hablamos de evento tengamos en cuenta además a los enunciados:

(b) Al lanzar el dado Y en la mesa de juego de la casa número 10 de la calle 15 de la ciudad de Lima, a las 3 y 1' p.m. del 2 de febrero de 1970, se obtuvo un as.

(c) Al lanzar el dado Y en la mesa de juegos de la casa número 10 de la calle 15 de la ciudad de Lima, a las 3 y 2' p.m. del 2 de febrero de 1970, se obtuvo un cuatro.

Consecuentemente, el enunciado **(b)** será de la forma $\mathbf{p}_r$ y $\mathbf{A}_r$ su respectiva clase de equivalencia o acontecimiento; el enunciado **(c)** será de la forma $\mathbf{p}_s$ con su correspondien-

9 Popper, Karl (1962) *La lógica de la investigación científica*. Madrid, Ed. Tecnos, p. 80, Párrafo 21.

te acontecimiento $\mathbf{A_s}$. Decimos que los acontecimientos $\mathbf{A_k}$, $\mathbf{A_r}$ y $\mathbf{A_s}$ son distintos porque $\mathbf{k \neq r \neq s}$. Asimismo, $\mathbf{p_k}$, $\mathbf{p_r}$ y $\mathbf{p_s}$ describen acontecimientos distintos.

Un evento es una clase de acontecimientos $\mathbf{A_k}$, $\mathbf{A_r}$, $\mathbf{A_s}$,..., etc., que difieren solamente en su subíndice y lo denotamos por **(A)**. De lo anterior deducimos que un evento es lo común a una clase finita o no de acontecimientos. Por tanto, lo denotado por **k**, **r** y **s** no puede ser lo determinante del evento **(A)** sino lo significado por 'Al lanzarse el dado *Y*', que nos permite hablar del evento «lanzamiento del dado Y». Para considerar a **k**, **r** y **s** distintos es suficiente que difieran en uno de sus componentes denotados.

Podría sostenerse que si *Y* es un dado «no-cargado», entonces su lanzamiento es similar al de cualquier otro dado del mismo tipo; por consiguiente, sería suficiente hablar del evento «lanzamiento de un dado no-cargado». Sin embargo, aunque la formulación elíptica generalmente es lícita, preferimos la propuesta por razones de comodidad en la ejecución de operaciones. Según las necesidades se debe graduar la precisión con que se formula un evento. La condición es que **k**, **r** y **s** tengan en común, entre sus **n** elementos denotados, al menos uno y a lo más **n-1**. La última limitación tiene como finalidad evitar que se repita el mismo acontecimiento.

En adelante nos interesarán eventos cuyos acontecimientos manifiesten los siguientes comportamientos: (i) varían en sus coordenadas temporales a manera de sucesiones y también con respecto a un atributo, de tal suerte que se sabe con exactitud si un acontecimiento posee o no el atributo en cuestión; (ii) varían en sus coordenadas espaciales, nombre de individuo y atributo. Si pertenecen a (i), mantienen constantes el nombre de individuo y las coordenadas espaciales. Si pertenecen a (ii), mantienen constantes las coordenadas temporales.

Las restricciones anteriores son consignadas debido a la precisión con que deben hacerse e interpretarse los cálculos cuando se aplica un sistema axiomático de probabilidades. Un ejemplo que ilustra (i) es el evento «lanzamiento del dado Y». Como ejemplo de (ii) citamos «nacimiento de un ser humano», que puede ser mejor formulado en términos de «nacimientos de seres humanos en el intervalo de tiempo t». Si el caso lo requiere puede lograrse, como anotáramos antes, mayor precisión.

El modelo frecuencial

1.1 Haremos nuestro el criterio de Von Wright[10] para clasificar los modelos que se usan para interpretar los sistemas axiomáticos de probabilidades. Según este autor, dichos modelos son de dos clases; los frecuenciales estadísticos y los de rango. Carnap[11], a quien han preocupado mucho estas cuestiones, también reduce todos los significados de «probabilidad» dentro del contexto científico, a dos conceptos: el de grado de confirmación y el de frecuencia relativa. Estos dos conceptos, como veremos luego, equivalen lógicamente a los modelos de rango y frecuencial, respectivamente, de Von Wright. Señalamos, como una apreciación con cargo a ser fundamentada en el transcurso de nuestra exposición, que el modelo de rango es acentuadamente lógico mientras el frecuencial es eminentemente matemático.

10 Von Wright, Georg Henrik (1965) *The Logical Problem of Induction*. Oxford, Basil Blackwell, Vid. Cap. VI, párrafo 2.
11 Carnap, Rudolf (1950) *Logical Foundations of Probability*. Chicago, The University of Chicago Press, párrafo 9, p. 25.

1.2 Pasemos ahora a presentar al modelo frecuencial-estadístico, al que llamaremos simplemente modelo frecuencial (en el párrafo anterior ya hemos optado por esta abreviación). Entre los primeros en sugerir un modelo frecuencial para la adecuada interpretación del entonces cálculo de las probabilidades, se citan los nombres de Poison en 1837, Cournot en 1843, George Boole en 1854. Fue, sin embargo, John Venn quien en 1866 afirmó por primera vez que el concepto de límite de la frecuencia relativa satisfacía los axiomas del cálculo de las probabilidades de su época. Posteriormente, en 1919, Richard von Mises dio una formulación completa a la idea de Venn, introduciendo, además, la noción de colectivo para dar con respecto a ella una definición de probabilidad. Reichenbach usó el concepto de límite de la frecuencia relativa, de manera sistemática, desde 1931, aunque parece que ya lo había planteado en 1915, según anota Carnap[12]. Un desarrollo similar es debido a Fisher en 1931. Asimismo, la mayor parte de trabajos y textos de estadística usan el modelo frecuencial, razón por la que se le llama estadístico.

Al modelo expuesto en la presente sección lo llamaremos «modelo frecuencial clásico», cuyos teóricos más conocidos son Von Mises y Hans Reichenbach. De esta manera, diferenciamos nuestro modelo de otros análogos propuestos por Popper y Fisher. Asimismo, anotamos que modelos, aparentemente muy distintos del nuestro, como el «briareico» de Braithwaite[13], están próximos a ser frecuenciales. Esto último elimina algunas dificultades de la teoría de Mises, generadas por los conocidos axiomas de aleatoriedad y convergencia, pero se basa en una «aritmética de razones de clase», compatible con la noción de frecuencia relativa.

Con ligeras modificaciones, nuestro «modelo frecuencial clásico» es el propuesto por Reichenbach en su libro *The Theory of Probability*. Antes de justificar esta elección, señalaré lo significado con 'ligeras modificaciones'.

El modelo descrito por Reichenbach es más general que el aquí desarrollado, pues admite tanto la «implicación interna de probabilidad»[14] como la «implicación externa de probabilidad». Aclarando lo último, indicamos que Reichenbach considera que la estructura de los enunciados de probabilidad, usados en los lenguajes no formalizados, es susceptible de ser expresada rigurosamente por la siguiente fórmula lógica, que no es analítica:

$$(\mathbf{f.1})(\forall \mathbf{x})(\forall \mathbf{y})(\mathbf{f}(\mathbf{x}) \wedge \mathbf{c}\,(\mathbf{x},\mathbf{y}) \underset{\mathbf{p}}{\rightarrow} \mathbf{g}(\mathbf{y}))$$

En (f.1) el operador indica que no se trata de una implicación analítica. El componente '**c (x,y)**' denota una relación de «uno a uno» del dominio de **f(x)** al de **g(y)**, sin suponer identidad entre las variables '**x**', '**y**'. Esto significa que (f.1) puede cumplirse en el caso en que '**x**', '**y**' denoten a distintos individuos. Trabajar con esta generalidad demanda que para aplicar (f.1) a la mayoría de los casos relevantes se añadan algunas condiciones especificadoras como, por ejemplo, que el dominio de **f(x)** sea una sucesión compacta. Por tanto, para evitar dificultades técnicas y pensado que ello no margina cuestiones fundamentales, hemos reducido la relación **c(x,y)** a una relación de identidad. Así (f.1) se reduce a:

$$(\mathbf{f.2})(\forall \mathbf{x})\left[\mathbf{f}(\mathbf{x}) \underset{\mathbf{p}}{\rightarrow} \mathbf{g}(\mathbf{x})\right]$$

12 Carnap, *idem*, párrafo 42, p. 187.
13 Braithwaite, Richard (1965) *La explicación científica*. Madrid. Ed. Tecnos, pp. 135 - 172.
14 Reichenbach, Hans (1949) *The Theory of Probability*. San Francisco. University of California Press, p. 48.

La fórmula (f.2) define la noción de «implicación de probabilidad» usada en nuestra exposición. Por esta razón la definición de 'probabilidad', proporcionada por el modelo luego desarrollado, se encuentra íntimamente ligada a relaciones entre atributos de los *mismos* individuos.

La segunda modificación, digna de mencionarse, es que nuestra presentación del «*modelo frecuencial clásico*» la desarrollamos a partir de la postulación de una definición rigurosa de '*evento*'. Ella supone el establecimiento de una clase de clases de equivalencia denominada *cuociente* y de una clase de los enunciados representativos de cada elemento del *cuociente*. Reichenbach, aunque usa la palabra 'evento', no precisa su significado y presenta su modelo independientemente de dichos detalles.

Por otro lado, para justificar nuestra preferencia por el modelo frecuencial de Reichenbach, señalamos:

El modelo de Von Mises es menos general que el de Reichenbach. La excesiva particularidad del de Von Mises se traduce en la exigencia de una clase de acontecimientos denominada colectivo, cuya definición conlleva el uso de los axiomas de convergencia y aleatoriedad (a ellos haremos posteriormente alusión más detallada). El modelo de Reichenbach contiene el de Von Mises como un caso particular. Este se produce cuando la clase de referencia es una «sucesión normal».

Reichenbach ha expandido su modelo frecuencial para expresar en él a los enunciados de probabilidad sobre enunciados. Esta extrapolación permite dar al discutido concepto de probabilidad lógica una significación frecuencial. El desarrollo del planteamiento que identifica a la probabilidad matemática con la probabilidad lógica se encuentra en el capítulo 10, parágrafo 77 de *The Theory of Probability*. Una argumentación adicional se da en *Experience and Prediction*, parágrafo 33.

Características fundamentales del modelo frecuencial clásico

1.2.1. Los epistemólogos que proponen el modelo frecuencial clásico para un sistema axiomático de probabilidades, asumen que 'probabilidad' denota una relación entre dos enunciados referentes el primero a un evento y el segundo a una subclase propia o impropia de dicho evento. Nosotros, por razones de comodidad expositiva, hablaremos directamente de una relación entre clases. Esta relación, suponiendo un orden normal en su notación, no es simétrica.

1.2.2. La definición que hemos dado de 'evento' corresponde a lo que los matemáticos denominan una clase finita o no cuyos miembros son clases de equivalencia. A fin de explicar la semejanza de los conceptos anteriores con los de los frecuencialistas, asumamos, por ejemplo, que son dadas las clases de equivalencia $\mathbf{A_r}$, $\mathbf{A_s}$, $\mathbf{A_t}$, **...**, **etc.**, y que los elementos representativos de cada una de ellas difieren entre sí solamente en el individuo que denotan, luego, de acuerdo con el conocido axioma de elección de Zermelo[15], es posible tomar un enunciado representativo de cada una de las clases de equivalencia pertenecientes al

15 Existen diversas formulaciones del axioma de elección de Zermelo, al respecto puede verse una adecuada en Kleene S. (1968) *Mathematical Logic*, John Wiley and sons, p. 190.

evento y formar una clase de enunciados representativos, a la cual convendremos en llamar clase *cuociente*, debido a que está constituida por los elementos representativos de cada miembro del cuociente matemático, para este contexto. Esta última clase es equipotente con cualesquiera de las clases de objetos entre las cuales Reichenbach[16] establece la relación de frecuencia relativa, con la diferencia de que nosotros haremos explícito que cada objeto es, dentro del lenguaje científico, descrito por un enunciado de la forma p_k. Asimismo, desde la perspectiva frecuencial, es indiferente trabajar, en este nivel, con conjuntos de objetos o conjuntos de enunciados.

De acuerdo con el teorema matemático de proyección canónica al *cuociente*, toda propiedad demostrada para el cuociente, entendido este en el sentido arriba indicado, puede ser aplicada a la clase de clases de equivalencia (*cuociente* matemático estricto), vale decir, al evento. La razón es que dado un enunciado representativo, se sigue de él la existencia de una única clase de equivalencia representada. Si 'probabilidad' denota un tipo de relación entre un evento y una subclase de él y puesto que dicha relación puede, sin inconvenientes, ser definida para el *cuociente*; luego, conversamente, los resultados obtenidos en este último pueden ser generalizados al evento que sea el caso.

Anotamos que los teóricos del «*modelo frecuencial clásico*» aplican, generalmente, la relación denotada por 'probabilidad' a clases infinitas. Si la mencionada relación se estableciera, como un caso particular, en una clase finita de clases de equivalencia, entonces el cuociente resultante sería equipotente con una clase de objetos observables, caso particular para el cual Reichenbach estableció, en sentido estricto, la relación de frecuencia relativa. Es importante precisar que, en este contexto, 'probabilidad' no denota rigurosamente la misma relación para clases infinitas y finitas. La variante es que en el primer caso debe existir un valor límite para la secuencia de frecuencias relativas que tiende a infinito.

1.2.3. De acuerdo con el «modelo frecuencial clásico» la relación que expresa un enunciado de probabilidad es de dos componentes, el primero se denomina clase de referencia y el segundo clase atributo. Postulamos que la primera pertenece a una clase de clases que son equipotentes con cuocientes y, por tanto, lo demostrado para ellas puede ser expandido inmediatamente a eventos. Usaremos como símbolos para clases las letras mayúsculas A, B, C, D, ..., etc. Supondremos, además, que estas clases tienen sus elementos ordenados de alguna manera. Por facilitar la explicación, nos referimos primero a clases finitas.

El número cardinal de cualquier clase lo denotaremos por:

$$\text{(f. 3)}\ N_{i=1}^{n}(x_i \in A)$$

La fórmula (f.3) se lee: «El número de elementos pertenecientes a **A** entre **1** y **n**». Evidentemente, el valor de **N** es el número cardinal de A. El componente '$\mathbf{x}_i$' denota a enunciados de la forma $\mathbf{p}_k$ u objetos (o fenómenos). Debido a la limitación expresada por la condición (f.2) y debido a que nos circunscribiremos a sucesiones compactas, tendremos **N=n** siempre que tenga sentido hablar de número cardinal. Aclaramos que una sucesión es compacta cuando satisface.

16 Reichenbach, H.: *idem*, p. 69.

$$(f.4)\ \forall(i)\ (x_i \in A)$$

La intersección de clases la denotaremos ($A \cap B$) y la suma o unión de clases por (AUB). Además, podemos introducir una abreviación mediante la siguiente definición:

$$(f.5)\ N^{n}_{i=1}\ (x_i \in A) = Df.\ N_n\ (A)$$

En virtud de (f.5) los números cardinales de la unión e intersección de clases se escriben N^n (A U B) y N^n ($A \cap B$), respectivamente. Hacemos constar que la notación de esta sección la hemos tomado de Reichenbach.[17]

1.2.4. La relación denotada por 'probabilidad' es tal que permite asociar a todo enunciado de probabilidad con un número racional del intervalo abierto (1,0). La mencionada relación es denominada «relación de frecuencia relativa» y en nuestra notación se expresa por:

$$(f.6)\ \mathbf{F}^n\ (A,B) = p$$

La fórmula (f.6) se lee: «La frecuencia relativa del atributo B sobre el número **n** de elementos de **A** es igual a **p**». La letra 'p' se refiere a un valor numérico calculable por una equivalencia luego señalada, la cual permite deducción de la validez de $0 \leq p \leq 1$. De otra parte, A puede ser asumida como la clase de los enunciados que satisfacen la función proposicional f (x) y B, de la misma manera, la clase de los enunciados que satisfacen g(x); si, además, B es una subclase propia o impropia de A, entonces hemos logrado expresar la frecuencia relativa como una relación entre dominios de funciones proposicionales definidas para una misma variable de individuo.

1.2.5. El valor **p** de la frecuencia relativa F^n (A,B) se determina como el *cuociente* de una fracción que en el numerador precisa el número de elementos de A que también son B y en el denominador el número de elementos de A: en consecuencia tenemos:

$$(f.7)\ F^n\ (A, B) = \frac{N^n\ (A \cap B)}{N^n\ (A)}.$$

La fórmula (f.7) permite computar la proporción de elementos de B que existe en A. Nuestra postulación hecha en el parágrafo cifrado 1.1.2.3. de que la clase A es equipotente con un cuociente obtenido por selección, hace innecesario añadir que el valor de (f.7) es determinado a condición de que A sea no vacía, pues el axioma de selección de Zermelo da por supuesta la existencia de al menos un elemento en cada clase de equivalencia del evento. Braithwaite[18], denomina a la frecuencia relativa, debido a su forma fraccionaria, una «razón de clase».

17 Reichenbach; *idem*. pp. 67-76.
18 Braithwaite; *idem*. p.142.

Lo expresado por (f.7) no presenta dificultad alguna mientras nos restrinjamos a clases finitas, sin embargo la relación denotada por 'probabilidad', según la tesis frecuencialista, no siempre coincide con la de frecuencia relativa tal y como ha sido definida antes. La diferencia se explica porque frecuentemente se pretende que 'probabilidad' denota principalmente una relación entre secuencias potencialmente infinitas. Por tanto, interesa no el valor de la frecuencia relativa sino el valor del límite de la frecuencia relativa en una secuencia que tiende a infinito. La justificación, para acudir a este recurso matemático, es que solo con respecto a clases infinitas 'probabilidad' denota algo interesante que hace factible la predicción en sucesiones tan grandes como se desee. En la aplicación del cálculo de las probabilidades a un evento tan simple como las tiradas de un dado, no sería fecundo postular que hay un número finito de tiradas cuando podemos concebir la sucesión de las tiradas indefinidamente larga.

Para proseguir nuestra tarea, diremos que cualquier enunciado de probabilidad tiene la forma:

$$\text{(f.8) } P\,(A,B) = p$$

La fórmula (f.8) se lee: «La probabilidad que desde **A** se siga **B** es **p**». Luego, debido a que hemos precisado que 'probabilidad' denota una relación especialmente importante en secuencias infinitas, tenemos:

$$\text{(f. 9) } P\,(A,B) = \lim_{n\to\infty} F^n(A,B)$$

El sentido de (f.9) es indicar que cuando puede establecerse el valor límite de la frecuencia relativa en una secuencia tan larga como se quiera, entonces será posible predecir, para cualquier prolongación de la secuencia, que el valor de la frecuencia relativa permanecerá dentro de un intervalo muy pequeño. Supongamos que prolongamos la secuencia en cuestión hasta **s** elementos, vale decir, hacemos a la clase de referencia de **s** elementos (**s** > **n**). Si previamente hemos determinado que el valor del límite es $\mathbf{h^n}$, esto es:

$$\lim_{n\to\infty} F^n(A,B) = h^n$$

Luego podemos afirmar que cualquier valor futuro de la frecuencia cumplirá necesariamente la siguiente condición:

$$\text{(f. 10) } h^n - k \leq h^s \leq h^n + k$$

La condición (f.10) puede ser formulada más brevemente por:

$$h^s \in h^n \pm k,$$

que se lee: h^s pertenece al intervalo , siendo k, obviamente, en los dos casos precedentes, una cantidad muy pequeña. Una de las tesis fundamentales, sino la principal, del pensamien-

to epistemológico de Reichenbach[19] es que (f.10) constituye el «principio de inducción» y que, en consecuencia, soluciona el tradicional problema de las inferencias inductivas, pues permite predecir, certeramente, a las ciencias empíricas cuando las secuencias tienen un límite determinable.

El debate suscitado por la postulación del «principio de inducción» fue muy animado y aún sigue abierto. Su autor lo defendió con vehemencia de críticas como la que afirmaba que dicho principio presuponía la uniformidad de la naturaleza y se apoyaba, consecuentemente, en una hipótesis metafísica. Nosotros, por ahora, nos limitaremos a la mención anterior.

Consecuencias de la postulación del Modelo Frecuencial Clásico

1.3.1. La palabra 'probabilidad' denota principalmente una relación definida para elementos de eventos. Debido a que los miembros de la clase atributo pertenecen en su totalidad al evento de referencia, la fórmula (f.7) puede ser simplificada a:

$$\text{(f.11)}\ F^n = 1/n\ N^n\ (B)$$

Por consiguiente, cuando N^n (A) = N^n (B) el valor de F^n (A,B) = 1. Para secuencias indefinidamente prolongables, si (A) = (B), luego Lim F^n (A,B) = 1. Si B es una clase vacía, F^n (A,B) = 0. Por tanto $0 \leq F^n(A,B) \leq 1$.

1.3.2. El valor de F^n (A,B)[20] para secuencias finitas o no indica solo la proporción de miembros de A que son también de B pero no hace especificaciones sobre ningún miembro en particular. El valor de la frecuencia relativa dice cuántos pero no cuáles. En el lenguaje natural se usa a menudo 'probabilidad' en enunciados que exhiben nombres individuales. Ellos serán considerados formulaciones inadecuadas las que deben ser traducidas a otras que hagan explícitos el evento de referencia y el atributo, de tal suerte que desaparezca todo nombre individual. En la medida que un enunciado de probabilidad afirma el valor de una frecuencia relativa o de su límite, no puede ser refutado ni confirmado por un ejemplo particular. En el caso de los enunciados referentes a sucesiones infinitas que son las leyes científico-empíricas ningún conjunto finito de observaciones puede refutarlos ni confirmarlos completamente. Como esta característica es incompatible con la necesidad de decidir enunciados, se ha juzgado oportuno incluir reglas adicionales, esencialmente metodológicas, como la de las «desviaciones reproducibles» de Karl Popper, para encarar este problema.

1.3.3. La relación de frecuencia relativa es empírica, pues su valor o el de su límite se determina en base a observaciones. Lo anterior significa que un enunciado de probabilidad es fáctico y no analítico. La información empírica necesaria para establecer un enunciado de probabilidad es de naturaleza estadística. En razón de que la cantidad de información puede ser incrementada por nuevas observaciones, el valor de un enunciado de probabilidad siempre es rectificable a la luz de los nuevos datos. Asimismo, un sistema axiomático de probabilidades se encuentra al margen de cómo se determina empíricamente el valor de **p** de (f.8); lo que le compete a este es: dada la existencia de ciertos valores de probabilidad,

19 Reichenbach: *idem*. pp. 429 - 482. También Reichenbach (1961) *Experience and Prediction*. Chicago, The University of Chicago Press, p. 340 y ss. Nos referimos en adelante, sólo al valor de F^n (A,B). El lector interpretará este valor como el del límite cuando sea el caso.

20 Vid. Popper, C.: *idem*. cifra 68, p. 189.

derivar de acuerdo a reglas lógicas otros. Lo anterior no obsta que estructuralmente los teoremas de un sistema axiomático de probabilidades sean válidamente deducibles aunque puedan ser interpretados usando enunciados fácticos. Todo lo que afirma un teorema es que ciertos valores de probabilidad serán lógicamente determinables siempre y cuando otros, denominados probabilidades básicas, sean dados.

1.3.4. Los enunciados de probabilidad de la forma P (A, B) asumen un valor solo cuando se refieren a sucesiones fácticas expresables mediante sucesiones convergentes, en otras palabras, sucesiones para las cuales existe un límite. Esta peculiaridad no ofrecería dificultad si se trabajara con sucesiones matemáticas convergentes en las que, por ser generadas por una regla, siempre es calculable el valor del límite. Sin embargo, no toda sucesión matemática es convergente y no puede afirmarse categóricamente que un evento corresponde a una sucesión fáctica con las características de una sucesión matemática convergente. En consecuencia, un sistema axiomático de probabilidades es aplicable solamente bajo el supuesto de que existen sucesiones fácticas compatibles con sucesiones matemáticas convergentes. No hace falta asumir, como algunos críticos lo han apuntado, el principio de uniformidad de la naturaleza enfatizado por la inducción clásica de Stuart Mill (ver pp. XX), pues lo dicho no excluye el reconocer la existencia de casos en los que un sistema axiomático de probabilidades es inaplicable.

En atención a la condición expresada en el parágrafo cifrado con 1.1.2.3, la fórmula (f.7) se da sobre el supuesto de que los elementos de A y B se encuentran en cierto orden. Debido a que las técnicas matemáticas para calcular el valor del límite toman en cuenta, como factor relevante el orden de la sucesión, entonces una debilidad de este enfoque es que si se modifica el orden puede cambiar el valor del límite.

El valor de un enunciado de probabilidad P(A, B) se mantiene constante si son constantes su clase de referencia y su atributo. Si en P (A, B)= p se mantiene constante el atributo pero se modifica el evento, el valor de **p** puede modificarse. La alteración anterior, de producirse, no atentaría contra la unicidad del valor de **p** porque en tal caso, no se trataría del mismo enunciado.

1.3.5. La cuestión planteada por la llamada probabilidad lógica esto es, por la probabilidad de un enunciado de probabilidad, desde la perspectiva frecuencial, es irrelevante, ello debido a que un enunciado de probabilidad sobre eventos es traducible en términos de un enunciado de probabilidad sobre una sucesión fáctica. Obviamente, cada elemento de la sucesión fáctica debe ser describible por un enunciado singular de la forma $\mathbf{p}_k$. Cuando se desee precisar la probabilidad lógica de un enunciado, debe traducirse a este último en términos de enunciados singulares y calcularse la frecuencia relativa sobre el número de ellos que satisfaga el atributo *verdadero*. De este modo *verdadero* se convierte en el valor límite de un enunciado de probabilidad sobre una secuencia de enunciados singulares que tiende a infinito.[21]

Por razones de simplicidad puede construirse una escala para clasificar a los enunciados que expresan una probabilidad lógica en solamente verdaderos o falsos. Denotemos por **P(h)** la probabilidad del enunciado **h** y consideremos el valor p igual a ½.

21 Vid. Reichenbach (1949), cifras 75 y 77, pp. 387-395.

Si $P(h) \geq 1/2$, diremos que **h** es verdadero.

Si $P(h) < 1/2$, diremos que **h** es falso.

La concepción clásica, erigida sobre la definición de 'probabilidad' dada por Laplace y el conocido «Principio de Indiferencia», se convierte en un caso particular dentro del «modelo frecuencial clásico». La afirmación precedente se funda en: (i) que la definición dada por Laplace como primer principio de su *Ensayo filosófico sobre las probabilidades* es: «la razón entre el número de casos favorables y el de todos los casos posibles»[22], (ii) que el «Principio de Indiferencia» enunciaba que todos los casos posibles pueden ser asumidos como igualmente posibles si no hay información que señale lo contrario. De (i) y (ii) se deduce que la concepción de Laplace se refería a una sucesión sobre la cual se calculaba la frecuencia relativa de los atributos B, C, D, ..., etc., según sea el caso, y se asumía, de no existir información en contra, que el valor de la frecuencia relativa para cada uno de estos atributos era igual. Lo anterior explica por qué los clásicos vieron en el juego de dados el ejemplo por antonomasia al cual aplicar el cálculo de las probabilidades. A este juego se recurrió para demostrar la validez del «*Principio de indiferencia*» llamado también «*Principio de Razón Insuficiente*»[23]. Se afirmaba que las seis caras de un dado eran igualmente posibles en tanto no existía razón alguna para suponer lo contrario. Además, a las sucesiones fácticas, que satisfacían el «Principio de Indiferencia», se les llamó sucesiones azarosas y se señaló como su característica típica la no existencia de táctica alguna para predecir los atributos de sus elementos con éxito.

El error de los clásicos radicó en creer que la igualdad de los valores para las frecuencias relativas de A, B, C, ..., etc., podía establecerse *a priori* en virtud del «*Principio de Indiferencia*». Ello equivalía a sostener la calculabilidad de dicha igualdad a partir de la ignorancia absoluta. La causa de que se mantuviera por largo tiempo este error fue, presumiblemente, el éxito de las aplicaciones del cálculo de las probabilidades a los juegos de azar. Este hecho, conjeturamos, impidió que se sospechara la presencia de un error de base.

La tesis frecuencialista prescinde del «*Principio de Indiferencia*» o de cualquier otro parecido, porque sostiene que un enunciado de probabilidad es empírico y, en ese sentido, incompatible con todo apriorismo para asignar valores de probabilidad. Por tanto, propone como criterio para decidir si una sucesión es azarosa o aleatoria que se la prolongue lo suficiente y si al calcularse los valores de las frecuencias relativas o de sus límites para los atributos B, C, D, ..., etc., se encuentra que estos valores son iguales, entonces se afirma que la sucesión en cuestión es azarosa o aleatoria. Cuando la sucesión azarosa es infinita, Von Mises la llama colectivo[24] y define el valor de P (A, B) como igual al límite de la frecuencia relativa de un atributo en un «colectivo».

En consecuencia, de conformidad con lo antes dicho, la aplicación del cálculo clásico de las probabilidades se reducía a sucesiones con propiedades B, C, D, ..., etc., tales que:

22 Laplace, Pierre S. (1974) *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. Buenos Aires, Ed. Espasa Calpe, p.21.

23 Esta denominación la hemos recogido de Von Wright (1965), p. 100. Allí mismo señala que la versión original de este principio fue de James Bernouilli.

24 Von Mises, Richard (1946) *Probabilidad, estadística y verdad*. Buenos Aires, Ed. Espasa Calpe, p. 51.

$F^n(A,B) = F^n(A,C) = F^n(A,D) = \ldots = \text{etc.}$

La igualdad anterior es la misma cuando se trata de límites. A estas sucesiones se les denomina equiprobables.

Objeciones al modelo frecuencial clásico

Al modelo frecuencial clásico se le han hecho múltiples objeciones. Para exponerlas, nosotros consideraremos que ellas son fundamentalmente de dos clases: (i) las que afirman la existencia de errores de base en el modelo frecuencial clásico, de tal modo que este resulta insuficiente para dar cuenta aun de los enunciados de probabilidad más simples; (ii) las que señalando las limitaciones del modelo frecuencial clásico le reconocen, sin embargo, un amplio campo de aplicación. Primero presentaremos las objeciones de la clase (i) para luego hacer lo propio con las de la clase (ii).

1.4.1. El modelo frecuencial clásico tiene la limitación de hacer depender el valor de la probabilidad del orden particular que presenta la sucesión fáctica, pues la noción es implícitamente ordinal. Esto significa que el valor de P(A,B) puede cambiar si modificamos el orden de los elementos de la sucesión, lo cual no es compatible con la definición de 'probabilidad' en términos de proporción desde que esta última puede mantenerse completamente ajena a todo criterio de orden: Braithwaite[25] es uno de los teóricos más importantes de la objeción precedente.

1.4.2. No toda sucesión matemática es convergente y puede probarse que existen sucesiones fácticas, interesantes para el investigador, no expresables por sucesiones matemáticas convergentes determinables por una regla de construcción. De otra parte, si los enunciados de probabilidad se refieren a sucesiones fácticas infinitas, entonces no puede saberse nunca si una sucesión no convergente, hasta donde nuestros conocimientos nos permiten afirmarlo así, tenderá después de un elemento enésimo hacia un límite. Por tanto, los enunciados de probabilidad dentro del esquema frecuencial son infalsables. Esta ingeniosa objeción se la debemos a W. Kneale.[26]

1.4.3. El «modelo frecuencial clásico», al hacer coincidir el valor de la probabilidad con el límite de la frecuencia relativa en sucesiones infinitas, nos compromete con la innecesaria suposición metafísica de que hay sucesiones fácticas infinitas. Este supuesto es inadecuado para el conocimiento empírico que es incompatible con un número infinito de observaciones. Asimismo, un enunciado del tipo 'Todos los gatos son negros' tendrá un valor de probabilidad 1 tanto en el caso en que todos los gatos sean negros como en el que haya algunos gatos no negros, pues 1 como valor del límite de la frecuencia de un atributo en una sucesión infinita no requiere, necesariamente, que todos los elementos de ella tengan dicho atributo. Igualmente el enunciado anterior tiene probabilidad 0 (cero) si no hay gatos negros o si existen algunos gatos negros. Por tanto, desde la tesis frecuencialista, las condiciones en las que asume un enunciado uno de los valores 1, 0 no son únicas y conducen a confusiones. Esta objeción ha sido formulada por F.S. Barker[27].

25 Braithwaite; *idem*. p. 144 y ss.
26 Kneale, William (1963): *Probability and Induction*. Oxford. Oxford University Press, cifra 32, p. 159.
27 Barker, Sthephen F., *Inducción e hipótesis*; B. Aires, Ed. Eudeba, 1963, pp. 88 y 55.

1.4.4. El valor del límite de la frecuencia relativa, cuando ha sido determinado, no permite deducir valor alguno para las frecuencias relativas de segmentos finitos de la sucesión, que son los únicos observables. Debido a la restricción anterior no puede concederse a un enunciado de probabilidad, lógicamente consistente, la condición de una hipótesis de alto nivel porque no pueden derivarse de él consecuencias observables. Esta objeción ha sido formulada por Braithwaite, en las páginas citadas con ocasión del argumento 1.4.1.

Enunciaremos a continuación las objeciones de la clase (ii).

1.4.5. Karl Popper[28] señala que el «modelo frecuencial clásico» es solo adecuado para atender enunciados de probabilidad sobre eventos. En ese sentido la consecuencia 1.1.3.5 es falsa, pues escapan a los alcances de la tesis frecuencialista generalizada tanto la probabilidad lógica como la corroboración de hipótesis. Este autor propone, además, remplazar el axioma de convergencia usado por el modelo en discusión, según lo establecido en 1.1.3.4. La mencionada sustitución es factible en razón de que la verdad de $0 \leq P(A,B) \leq 1$ nos permite introducir la noción de punto de acumulación de la sucesión de frecuencias relativas. La inserción anterior es legítima porque toda sucesión de frecuencias relativas está acotada por 1 y 0, y de acuerdo al conocido teorema de Bolzano y Weierstrass, toda sucesión infinita y acotada tiene al menos un punto de acumulación. Luego si tenemos la sucesión de frecuencias relativas correspondientes a un atributo B y **a** es el punto de acumulación, entonces P(A,B) = **a**.

1.4.6. Rudolf Carnap[29] también observa la identificación efectuada entre la probabilidad de eventos o probabilidad estadística y la probabilidad lógica. Él considera que los dos conceptos anteriores son diferentes y, para evitar confusiones, recomienda hablar de «grado de confirmación» en lugar de probabilidad lógica. La diferencia específica del «grado de confirmación» es que es una función numérica de la forma **c(h,e) = r**, cuyos valores se determinan analíticamente. Por consiguiente, dicha función es lógicamente verdadera o lógicamente falsa a diferencia de P (A, B) = límite F^n (A, B), n que tiene contenido fáctico de manera análoga a **c(h,e)**, pero que, por añadidura, la determinación de su valor también depende de la experiencia. Por otro lado, la función **c(h,e)** es una implicación lógica diferente a la ordinaria solo en grado. Mientras **c(h,e)** es una implicación lógica incompleta porque el rango de **e** no está totalmente incluido en el de **h**, la implicación lógica ordinaria es completa porque en ella el rango de **e** se encuentra contenido en el rango de **h**[30]. Así para Carnap, el estudio de la implicación ordinaria es tarea de la lógica deductiva y el de **c(h,e)** denominada función de confirmación o **c**- función, compete a la lógica inductiva.

Carnap no comparte la objeción 1.1.4.4, pues considera que ella se salva si no asumimos el valor del límite de la frecuencia relativa como un dato para deducir valores de frecuencias relativas en sucesiones finitas. El sentido del cálculo del valor del límite es predecir cómo se comportará la sucesión en el futuro. Sin embargo, el límite no debe ser identificado con el valor de las futuras frecuencias relativas sino que debe ser pensado como un estimado de ese valor.

En consecuencia, Carnap opina que agregar una teoría sobre el grado de aproximación de los estimados perfeccionaría y completaría al *modelo frecuencial clásico*.

28 Popper (1962) cifra 64, p. 173.
29 Carnap (1950) cifras 9 y 23, 41 y 43, pp. 19, 100, 162 y 192.
30 Vid. Carnap (1950), pp. 70-89. También Wittgenstein, Ludwig (1966) *Tractatus logico-philosophicus*. Londres, Routledge and Kegan Paul, cifra 5.15, p. 79.

La consideración atenta de los argumentos de Popper y Carnap mostrará que de las objeciones 1.4.1 a 1.4.4. ha quedado sin respuesta solo la cifrada con 1.4.3. La objeción 1.4.2, que parecería quedar pendiente, se desvanece si se recurre a lo dicho en 1.3.2. y 1.3.4.

En relación con la objeción pendiente indicamos que el *modelo frecuencial clásico* no supone necesariamente la existencia de secuencias infinitas sino que, si se presentan, las involucra. Si tomamos una secuencia finita, es suficiente hacer coincidir el valor de la probabilidad del atributo en cuestión con el último elemento de la secuencia de frecuencias relativas para dicho atributo. Reichenbach[31] señala claramente el procedimiento aludido cuando interpreta los axiomas de su sistema axiomático de probabilidad mediante el *modelo frecuencial clásico*.

Asimismo, la supuesta falta de unicidad en las condiciones que permiten atribuir a un enunciado de probabilidad uno de los valores 1, 0 se debe a que se identifica a estos con la certeza absoluta para la predicción. En vista de que los frecuencialistas no pretenden la citada identidad, la objeción desaparece.

El modelo de rango

2.0. En la medida que la objeción más seria al «modelo frecuencial clásico» ha sido su presunta insuficiencia para dar cuenta de los enunciados de probabilidades sobre hipótesis (enunciados), hemos juzgado oportuno referirnos en esta sección al modelo rango, cuya pretensión básica es subsanar la deficiencia antes referida. De manera notoria, la explicación dada en la sección precedente a la probabilidad de una hipótesis no resulta adecuada, pues no parece correcto afirmar que una hipótesis es más probable que otra solo por el hecho de poseer un número mayor de enunciados verdaderos de la forma $\mathbf{p}_k$, que la corroboren. Parece necesario, además, averiguar la naturaleza y los alcances de los enunciados corroboradores y de los contraejemplos.

El modelo de rango, que nos ocupará en adelante, no pretende excluir a la tesis frecuencialista sino delimitar su campo de aplicación. Por tanto, los teóricos del modelo de rango opinan que el «modelo frecuencial clásico» debe ser usado exclusivamente para calcular la probabilidad de los enunciados empíricos sobre sucesiones fácticas. Los valores así obtenidos dependen de la experiencia y un sistema axiomático de probabilidades solo puede derivar nuevos valores desde ellos si éstos proporcionan la información suficiente.

El pensador William Kneale[32] en su libro *Probability and Induction* señala que la noción de rango fue introducida por Von Kries en 1886, esto es, aproximadamente medio siglo después que se sugiriera el modelo frecuencial. Posteriormente, Wittgenstein[33], usando conceptos lógicos de su factura, dio la siguiente definición rigurosa de probabilidad en términos de rango:

*«If **Tr** is the number of the truth-grounds of a proposition '**r**', and if **Trs** is the number of the truth-grounds of a proposition '**s**' that are at the same time truth-grounds of '**r**', then we call the ratio **Trs**: Tr the degree of **probability** that the proposition '**r**' gives to the propositions '**s**'.»*

31 Reichenbach; (1949), cifra 12, p. 54.
32 Kneale (1965); cifra 35, p. 174 y ss.
33 Wittgenstein; cifras 5.15. - 5.156, pp. 79-83

En la definición precedente Tr y Trs son rangos como se puede verificar si se revisa 4.463 de la obra antes citada. Waismann[34] también se cuenta entre los que adoptaron el modelo de rango y Kneale, en la obra antes mencionada, lo desarrolla con alguna amplitud. Pero es Carnap quien partiendo de la definición de Wittgenstein nos ofrece en su *Logical foundations of probability* la exposición más exhaustiva que conocemos del modelo de rango. En lo que sigue haremos una descripción de dicho modelo.

2.1.1. Según Carnap, la palabra probabilidad cuando es predicada de hipótesis empíricas denota una relación entre los significados de enunciados. Los argumentos de esta relación son una hipótesis **h** y un enunciado o conjunto de enunciados **e** que cumple la función de informe de observación o evidencia empírica para **h**. El grado de la relación es mensurable por un número racional cualquiera del intervalo abierto 0,1; su valor es analíticamente decidible teniendo en cuenta sólo las condiciones de verdad de **h** y **e**. Ordinariamente, en lenguaje científico, se deja implícito el argumento **e**, omisión que ha dificultado la correcta comprensión de los enunciados de probabilidad.

La relación mencionada se denomina «grado de confirmación» y se escribe abreviadamente **c(h,e) = r**[35]. La notación precedente es útil para la construcción de un sistema axiomático en el cual c(h,e) es una función. Dicho sistema es llamado sistema de las **c**-funciones.

La función **c(h,e)** es una «implicación lógica parcial». Es debido a su carácter parcial que se recurre a una fracción propia para determinar su valor. Asimismo, la determinación por medios puramente analíticos del valor de las funciones del tipo c(h,e), no exige en modo alguno que **h** y **e** carezcan de contenido fáctico, pues las relaciones entre dichos argumentos pueden establecerse con independencia de que tengan referente factual o no.

2.1.2. Las funciones de confirmación (**c (h,e)** o **c**-funciones) no son cumputables en general sino en algunos casos, los cuales a continuación se especifican: (i) siempre que **h** y **e** sean enunciados moleculares de cualquier sistema ξ; (ii) cuando **h** y **e** sean enunciados de forma general o molecular de cualquier sistema infinito ξ_N; (iii) cuando **h** y **e** sean enunciados de cualquier sistema finito ξ_∞ el cual contiene solo predicados del grado uno. La forma de **h** y **e** en (iii) puede ser similar a las indicadas en (i) y (ii).

El signo ξ denota cualquier sistema lingüístico formalizado y el subíndice el número de individuos del dominio al cual se refiere. Las dos variedades de sistemas más importantes dentro del tipo ξ son los ξ_N y ξ_∞. Los ξ_N se refieren a un número finito de individuos y el valor de su sub-índice **N** puede ser cualquier entero positivo. Los ξ_∞ se distinguen por referirse a infinitos individuos. De otra parte, un enunciado molecular es aquel que está en forma normal disyuntiva o puede ser reducido a ella. Uno general es aquel que tiene la forma , tratándose de predicados de grado uno. El signo '()', en este trabajo, corresponde al cuantificador existencial.

Para la comprensión del modelo de rango es ineludible la alusión a los sistemas ξ. Ello se debe a que la noción de rango, decisiva para computar la función c(h,e), es relativa a un sistema lingüístico. Por tanto, recalcamos que la computabilidad de las **c**-funciones depende,

34 Información tomada de Kneale, idem. ibidem
35 La lectura de **c (h,e)=r** es: «La evidencia **e** asigna a la hipótesis **h** el grado de confirmación **r**».

además de los significados de **h** y **e**, del sistema ξ al que pertenezcan los argumentos de la función. En lo que sigue, a fin de determinar con exactitud qué es un rango, nos referiremos con algún detenimiento a los sistemas ξ. Previamente son pertinentes dos aclaraciones:

(1) Lo que expondremos luego constituye una síntesis, adaptada a nuestros intereses, de la descripción minuciosa de los lenguajes ξ realizada por Carnap en el capítulo III, parágrafo 14 -20, de la obra ya varias veces citada. Debe enfatizarse que este autor es prolijo y riguroso en dicho capítulo porque en su plan está aplicar los teoremas válidos en los sistemas ξ, que son deductivos, a su lógica inductiva. Este propósito está en concordancia con una de las tesis centrales de la epistemología de Carnap, la cual afirma que la lógica se divide en dos ramas: la lógica deductiva y la lógica inductiva. El desarrollo de la segunda presupone el desarrollo de la primera.

(2) La notación usada por Carnap demanda el empleo de tipos especiales, letras góticas. Nosotros para evitar dificultades prácticas los hemos adaptado a una tipografía más usual. Como no haremos una descripción especial para ξ_N y otra para ξ_∞, será suficiente referirnos simplemente a los sistemas ξ y cuando lo dicho deba ser particularizado añadiremos los subíndices $_N$ y $_\infty$ según las circunstancias lo demanden.

Hechas las aclaraciones anteriores pasamos inmediatamente a ocuparnos de los sistemas lingüísticos ξ, a los que genéricamente llamaremos lenguajes.

2.1.3. Hablar de un lenguaje requiere, como es conocido, de un metalenguaje. En este caso usaremos, para referirnos a los lenguajes ξ, al castellano como metalenguaje ayudado por los siguientes signos especiales:

(s.1) '*in*' denota constantes individuales

(s.2) '*im*' denota variables individuales

(s.3) '*pr*' denota predicados primitivos del grado n, n > 0

(s.4) 'U' denota cualquier expresión, esto es un signo individual o una secuencia finita de signos.

(s.5) 'M' denota matrices proposicionales o funciones proposicionales del tipo P(x)

(s.6) 'A' denota clases cuyos elementos son enunciados

(s.7) 'B' denota descripciones de estado

(s.8) 'R' denota rangos.

Añadiremos una regla de construcción que Carnap consigna a continuación de las convenciones anteriores.[36]

(s.9) «Un nombre en el metalenguaje para una expresión compuesta del lenguaje objeto se construye mediante la simple yuxtaposición de los nombres (o variables) de los signos que constituyen dicha expresión compuesta».

Para ilustrar el uso de la convención (s.9) consideremos: si '$\mathbf{pr}_i$' se refiere a **R**, '$\mathbf{in}_j$' a **b**, '$\mathbf{in}_k$' a **d**, luego '$pr_i in_j in_k$' se refiere a Rbd. Obviamente, Rbd pertenece a algún sistema ξ y, como veremos luego, su significación es la misma para todo lenguaje ξ.

2.1.4. Antes de señalar los signos de los ξ haremos una aclaración para evitar confusiones al interpretar la palabra 'enunciado'. Carnap usa la palabra '*sentence*' que hemos traducido por 'enunciado'. Con ella denota a una secuencia finita de signos o marcas como puede deducirse de su afirmación «*we have decided to understand by the term 'sentence' just the string of marks*» [37]. Por tanto la palabra '*sentence*' no se refiere al significado de los signos y una misma *sentence* que contiene variables individuales, por citar un ejemplo, no significa lo mismo en ξ_N que en ξ_∞.

Lo dicho no impide que Carnap afirme con sentido que una *sentence* expresa un significado o una proposición. Inclusive admite que las relaciones entre *sentences* pueden ser interpretadas como relaciones entre proposiciones.

En general los sistemas ξ tienen el mismo repertorio de signos con algunas variantes concernientes a su significado y número. Todo sistema ξ tiene un número finito de predicados primitivos de grado n, (n > 0). Si n = 0, el predicado respectivo es considerado como un enunciado; si n = 1, se le denomina propiedad; si n = 2, se le denomina relación diádica; y en general para n > 2 se habla de relaciones n-ádicas. Así P_1, P_2, etc. son propiedades y R_1, R_2, etc. son relaciones de grado n, (n > 2). Todo sistema ξ tiene un número infinito de variables individuales x_1, x_2, x_3, etc. Todo sistema tiene un número infinito de constantes individuales a_1, a_2, a_3, etc. Los sistemas del tipo ξ_N contienen las $_N$ primeras constantes individuales de un ξ_∞. Las constantes individuales de los ξ deben designar distintos y separados individuos. Asimismo, las variables individuales y las constantes individuales son denominadas genéricamente signos individuales.

Todo sistema ξ tiene el signo ' = ' de identidad que no debe ser considerado predicado primitivo. Contiene también los operadores '**v**', '.' **y** '~'. El '$\rightarrow$' o cualquier otro operador puede ser introducido mediante definiciones conocidas. Cada uno de los ξ contiene enunciados generales de las formas . En los ξ_N los enunciados de la forma son lógicamente equivalentes a la conjunción de $_N$ componentes Pa_1. Pa_2...Pa_N. La misma propiedad, en términos de componentes disyuntivos, se cumple para dentro de todo ξ_N.

Solo las variables individuales tienen diferente significación en diferentes sistemas ξ. Por tanto, todo enunciado que no contiene variables individuales tiene la misma significación en todo ξ. Existen además en todo ξ enunciados **t** que son tautologías. El orden de los

36 Carnap (1950), p. 56.
37 Carnap (1950), p. 60.

enunciados Ma_1, Ma_2, Ma_3, etc. es irrelevante. Para la presente versión puede optarse por un orden lexicográfico.

2.1.4. Para los signos de los ξ se dan las usuales reglas de formación aplicadas a los sistemas deductivos. Nosotros, en honor de la brevedad, las supondremos y pasaremos a las siguientes definiciones las cuales son una versión ligeramente modificada con respecto a las proporcionadas por Carnap.

(d.1) **i** es un enunciado atómico	=	Df. **i** tiene la forma $pr_i\ U_{j1}\ U_{j2}\ U_{jn}$ y cada una de las expresiones U_j es un signo individual.
(d.2) **i** es un enunciado básico	=	Df. **i** es un enunciado atómico o su negación.
(d.3) A_i es un par básico	=	Df. A_i es una clase de dos enunciados básicos, siendo el primero afirmativo y el segundo su negación.
(d.4) **i** es un enunciado de identidad	=	Df. **i** tiene la forma $U_i = U_j$.
(d.5) **i** es un enunciado molecular	=	Df. **i** es un enunciado atómico o está constituido por enunciados atómicos ligados por conectivas.
(d.6) **i** es un enunciado general	=	Df. **i** contiene al menos una variable **im** y por tanto al menos un cuantificador.
(d.7) **i** es un enunciado no general	=	Df. **i** contiene un número **n** de variables **im** y de cuantificadores, siendo n = 0.
(d.8) **i** es un enunciado puramente general	=	Df. **i** es un enunciado general y no contiene **in** alguna.
(d.9) **i** es un enunciado singular	=	Df. **i** es un enunciado molecular conteniendo ocurrencias de solamente una constante individual[1].

1. Carnap (1950), p. 67.

2.1.6. Precisar el concepto de rango demanda previamente esclarecer el de descripción de estado. A continuación usamos las convenciones de los parágrafos 2.1.3 y 2.1.4 para satisfacer la exigencia anterior. Una descripción de estado para cualquier ξ es una clase de enunciados, los mismos que precisan inequívocamente para todo individuo denotado por las **in** de ξ y para toda propiedad denotada por los **pr** de ξ, si todo individuo posee o no todas y cada una de las propiedades. Esta caracterización dada para predicados del grado 1 puede ser fácilmente generalizada.

Debido a que para todo ξ existe la clase de los pares básicos de ξ, todos sus posibles estados pueden ser descritos afirmando un enunciado **i** por cada par básico (i, ~ i). Si ξ_N se refiere a **N** individuos y tiene k predicados, luego en ξ_N la clase de los pares básicos tiene k x **N** elementos. Supongamos como ejemplo **N** = 3 y **m** = 2, luego la clase de los pares básicos de ξ_N tendrá como elemento a

(Pa, -Pa), (Pb,-Pb), (Pc, -Pc), (Qa, -Qa), (Qb, -Qb), (Qc, -Qc).

Denotemos con ${}_NB$ o ${}_\infty B$ una descripción de estado según ξ sea un sistema con un dominio finito o no, luego tendremos para el ejemplo dado

$Pa \,.\, Pb \,.\, Pc \,.\, Qa \,.\, Qb \,.\, Qc \; ({}_NB_1)$

$Pa \,.\, Pb \,.\, Pc \,.\, \sim Qa \,.\, \sim Qb \,.\, \sim Qc \; ({}_NB_2)$

$\vdots$

que son dos descripciones de estado de las $2^{k \times N}$ posibles.

Expresaremos en los ξ con V_B la clase de todas las descripciones de estado y con F_B la clase nula de las descripciones de estado.

Postularemos ahora que la cuestión planteada en términos de cómo determinar el significado de un enunciado en ξ se resuelve cuando se dilucida cuáles estados de ξ lo convierten en verdadero y cuáles en falso. Obviamente tales estados son conocidos a través de sus respectivas descripciones B.

2.1.7. En este parágrafo cumpliremos uno de los objetivos importantes perseguidos con el estudio de los sistemas ξ. Definiremos el rango de un enunciado y expondremos su relación con los denominados L-conceptos. Usaremos la convención '**Ri**' para referirnos al rango de un enunciado **i** cualquiera

(d.10) **Ri** en ξ = Df. la clase de todas las descripciones de estado B que hacen verdadero a **i**.

Los L-conceptos, llamados así por Carnap debido a su carácter estrictamente lógico, se definen con el auxilio de la noción de rango. A continuación presentamos tres de ellos, seleccionados en armonía con nuestros intereses.

(d.11) **i** es L-verdadero (en ξ) = Df. Ri es V_B

(d.12) **i** es L-falso (en ξ) = Df. Ri es F_B

(d.13) **i** L-implica j (en ξ) = Df. Ri es sub-clase de Rj, Ri $\rightarrow$ Rj

Entre estas definiciones tiene inmediata importancia para nosotros la (d.13). A la relación en ella definida Carnap la denomina «*implicación lógica completa*» porque el rango de **i** está contenido en el de j. Esta implicación es a su vez L-verdadera, pues si no lo fuera debería cumplirse R (i L-implica j) $\neq V_B$ y, por tanto, debería existir una descripción de estado Bh para la cual **i** sería verdadero y j falso. Pero esto es absurdo porque supone la existencia de un elemento de Ri que no pertenece a Rj. En consecuencia, hemos demostrado por reducción al absurdo la validez de «R (i L-implica j) igual a V_B».

Anotamos que a los enunciados L-verdaderos los hemos llamado en las secciones precedentes enunciados analíticamente verdaderos para diferenciarlos de los factuales o empíricos. Estos últimos también pueden ser definidos mediante relaciones entre rangos del modo siguiente:

(d.14) **i** es un enunciado factual (en ξ) = Df. Ri $\neq V_B$ y

Ri $\neq F_B$

A los enunciados L-verdaderos y L-falsos se les da la denominación genérica de L-determinados.

2.1.8. Lo expuesto desde el parágrafo 2.1.3 al 2.1.6 tienen por objeto familiarizarnos con el aparato conceptual dentro del cual Carnap define a la *implicación lógica parcial.* Puesto que esta última noción (que debe ser entendida como otra manera de referirse a c(h,e)) es la más importante de la presente sección, la precisaremos con detalle.

i) La *implicación lógica parcial* debe ser considerada uno de los L-conceptos en tanto es definible por medio de relaciones entre rangos. Por tanto, puede escribirse abreviadamente L-implicación parcial.

ii) La L-implicación parcial es expresada en los sistemas ξ por la función de confirmación c(h,e). Esta denota una relación entre rangos diferentes a la de subconjunto, pues indica solamente la proporción o medida del rango de un enunciado que se encuentra dentro del rango de otro enunciado.

iii) El enunciado '*i L-implica parcialmente j*' no es factual sino un tipo especial de enunciado L-determinado. Esto significa que el enunciado anterior es L-verdadero o L-falso cuando afirma la existencia de una relación métrica entre los rangos de **i** y de **j**. El grado de esta relación es expresado por un número racional del intervalo (0, 1) y puede ser calculado en base a información proveniente solo de análisis semántico de **i** y de **j**. Por consiguiente, mientras que un enunciado que expresa una L-implicación completa es verdadero para V_B de ξ cuando afirma una relación de subconjunto entre rangos, uno que expresa una L-

implicación parcial es verdadero para V_B de ξ si afirma una relación métrica o de medida entre rangos.

iv) La implicación parcial es el objeto de estudio de la lógica inductiva que es la disciplina encargada de establecer los métodos adecuados para calcular el valor de la relación de medida. Como dijéramos en el parágrafo 2.1.2, este valor no es siempre computable. Asimismo, la caracterización realizada en (i) - (iii) es completamente correcta para todos los casos en que la computabilidad es posible y válida en principio para los otros.

v) Para indicar el método de computación de c(h,e), cuando este existe, podemos asumir inicialmente que **h** y **e** son enunciados moleculares o funciones de verdad en ξ_N y, en consecuencia, son reducibles a enunciados en forma normal disyuntiva. Esto es posible porque cada B que hace verdadero a **h** es una conjunción de **N** componentes. Luego el rango de **h** estará constituido por la clase de todas las conjunciones de **N** componentes para las que **h** es un enunciado verdadero. Puesto que cada B es uno de los casos posibles para la verdad de **h**, el rango de este enunciado en ξ_N puede escribirse disyuntivamente: $B_1 v B_2$ lo mismo se cumple para **e**.

Dado que c(h,e) o **L-implicación parcial** denota una relación de inclusión parcial entre **Re** y **Rh**, la medida en que **e** apoya a **h** se determina en términos de la proporción de con respecto a **Re**. Para calcular la razón anterior se usa como medida un «eslabón» de cualquiera de las dos formas normales disyuntivas encontradas. Claramente, cada «eslabón» es una conjunción de **N** componentes. Si m(h,e) es el número de componentes B comunes a **Rh** y **Re** o la medida de en ξ_N, y m(e) el número de componentes B de Re o la medida de **e** en ξ_N, luego la proporción es expresada por:

$$(f.12)\ c(h,e) = \frac{m(e \cap h)}{m(e)}$$

La fórmula (f.12) proporciona un valor determinado a condición de que **m(e)** $\neq$ **o**. Cuando **Rh** $\cap$ **Re** = **Re**, luego **c(h,e)** = 1. Asimismo, si **Rh** $\cap$ **Re** = ϕ, entonces **c(h,e)** = **o**. Por otra parte la función c(h,c) debe cumplir necesariamente las siguientes condiciones:

Si **e** y **e'** son L-equivalentes (Re = Re'), luego c (h,e) = c (h,e')

Si **h** y **h'** son L-equivalentes (Rh = Rh'), luego c (h, e) = c (h', e)

Si es una conjunción L-falsa, luego c (**h** v j, **e**) = c (h, e) + c (j, e)

A **m(e.h)** o a **m(e)** Carnap las considera casos particulares de la función de medida genéricamente denominada **m**. Esta función es de carácter regular cuando satisface las siguientes condiciones: (1) Si $m(B_i)$, para todo B_i en ξ_N, es igual a un número real positivo; (2) Si la sumatoria de los valores **m** de las $2^{k \times N}$ descripciones de estado posibles en ξ_N es igual a 1. De (1) y (2) se deduce que **m** es una función regular para las B_i en ξ_N cuando consecuentemente, **c** es una función regular si está definida en términos de funciones **m** regulares.

Sin embargo, la validez de (f.12) se encuentra restringida a los sistemas ξ_N y es también de interés teórico precisar la computabilidad de c(h,e) en los sistemas de tipo ξ_∞. Con este fin escribiremos $_N$c (h.e) para indicar que la función **c** se encuentra en ξ_N y $_\infty$c (h,e) para indicar que **c** se encuentra en ξ_∞. Se afirma que $_\infty$c (h,e) = r si la función $_N$c (h.e), con **N** creciente, converge hacia r como a su límite. Esto se expresa formalmente:

$$(f.13)\ {}_\infty c\,(h,e) =_{Df.} \lim_{N\to\infty} {}_N c\,(h,e)$$

Como propiedades inmediatas de la función **c** mencionaremos:

a) Si **h** es una tautología el valor de **c** será máximo con independencia de **e**. Esto debido a que se postula que no hay enunciado más confirmado que una tautología. Esta propiedad se expresa formalmente:

c(t,e) = 1

c (h,e) + c (~ h,e) = 1, pues por la propiedad (a) tenemos c (h v ~ h, e) = c (t,h) = 1 y por (d) de (v)

Si Rh ∩ Re es igual a la clase vacía, con la adición de la propiedad (a) tendremos:

0 ≤ c (h,e) ≤ 1

Para c (h,e) = 0 puede sostenerse que **h** es L-falsa, vale decir, nada la confirma.

La confirmación sobre la evidencia de una tautología t es denominada confirmación nula y se escribe abreviadamente así: $\mathbf{c}_0$. En este caso se postula que el valor de **c** es siempre mayor que cero. Expresado formalmente se tiene:

$$c(h,t) = c_0\,(h,t)$$

$$c_0\,(h,t) > 0$$

Con lo expuesto esperamos haber indicado los rasgos fundamentales del modelo de rango. En el próximo parágrafo derivaremos algunas consecuencias, a nuestro juicio, importantes.

Consecuencias de la postulación del modelo de rango

2.2.1. Existen dos tipos de enunciados de probabilidad a saber: (i) los que denotan una relación de frecuencia relativa; y (ii) los que denotan una relación de medida entre rangos. Los del tipo (i) son factuales y estadísticos, mientras los del tipo (ii) son analíticos o lógicamente determinados. En ambos casos el grado de la relación es determinado por el valor de un *cuociente*.

2.2.2. Los sistemas axiomáticos construidos a base de las funciones de la forma c(h,e) son los que admiten como su interpretación verdadera al modelo de rango. Los componentes m(e.h) y m(e) de la relación de medida entre rangos denotada por c(h,e), pueden también ser interpretados como clases de individuos determinadas por atributos dentro de universos de **N** o ∞ individuos. De esta manera c(h,e) admitiría además una interpretación frecuencial y habría la posibilidad de que un sistema formal de funciones **c** tenga algunos teoremas paralelos a otro de funciones P(A,B).

2.2.3. Un sistema formal de funciones **c** no plantea la cuestión referente a la probabilidad de **c**. Pues en tanto esta función es L-determinada solo puede ser L-verdadera o L-falsa. En este sentido la aparición de nuevos datos no modifica el valor de la función **c** (lo que sí ocurre en los sistemas construidos sobre la base de las funciones P(A,B)) sino que plantea la necesidad de formular otra función **c**, lógicamente determinada, que no es en modo alguno la anterior corregida sino otra.

2.2.4. El modelo de rango no es independiente del supuesto de convergencia, nota que tiene en común con el frecuencial. Los enunciados generales en ξ_∞, cuando son computables, suponen la necesaria convergencia del valor de **c**, para **N** creciente, hacia un número r que es su límite.

2.2.5. En la función **c** el argumento **h** puede ser un enunciado singular, particularidad que escapa a los alcances del modelo frecuencial. La determinación del valor de **c** en este caso no entraña ninguna dificultad especial con respecto a la aplicación de las reglas generales de computación. Por consiguiente, es completamente lícito hablar de grado de confirmación de enunciados singulares dentro del modelo de rango.

2.2.6. El modelo de rango es definitivamente de carácter lógico en el sentido de que sus conceptos fundamentales están cimentados sobre la conocida lógica de las proposiciones y la lógica funcional de primer orden. Así la computabilidad de la función **c** está restringida a los casos decidibles dentro de la lógica de primer orden. De otra parte la noción de rango en ξ, claramente definida antes por Wittgenstein, se funda en el establecimiento de todos los arreglos posibles construibles con los individuos del dominio de ξ, donde la longitud de cada uno de los arreglos es igual al número de predicados por el número de individuos. La medida de rango de un enunciado está dada por el número **m** de arreglos, tomados del total de $\mathbf{2}^{k \times N}$ arreglos, en los que tal enunciado es verdadero. Esto nos conduce a inferir que el modelo en cuestión, al no considerar dentro de un rango a todos los casos posibles sino solo a los que hacen verdadero al enunciado que sea el caso, no presupone el principio clásico de la equiprobabilidad. Así la definición clásica, que incluía el llamado Principio de Indiferencia, quedaría reducida a los casos en que el argumento **e** es L-verdadero, vale decir, cuando **e** incluye todos los casos posibles en iguales condiciones.

2.2.7. Las relaciones entre el modelo de rango y el concepto de *cuociente* de una apuesta imparcial (no mencionada antes en este trabajo) no parecen inmediatamente claras. Sin embargo es importante indicar que este último concepto ha sido usado por Carnap para definir en términos de azar el grado de confirmación[38]. Asimismo, anotemos que el autor citado en su ponencia presentada a el Coloquio Internacional de Filosofía de la Ciencia realizado en

38 Carnap (1950) pp. 161-182.

Londres en 1965[39], insistió en vincular el concepto del mejor cuociente con el que una persona puede apostar contra otra, con el grado de creencia. Como estos asuntos tienen implicancias que escapan a nuestro tema, nos limitamos solamente a señalarlos.

Una objeción importante al modelo de rango

2.3.1. Popper, en algunos artículos que se publicaron originalmente en *The British Journal for the Philosophy of Science*, objeta la identificación de la probabilidad lógica con el grado de confirmación, apuntando así a una de las tesis fundamentales sobre las que se erige el modelo de rango. Los artículos mencionados, en español, han sido añadidos por su autor, como apéndices, a su obra *La lógica de la investigación científica*.

En vista de que la argumentación de Popper se basa en algunos conceptos precisados a través de la totalidad del libro aludido, para facilitar la comprensión de su objeción, nosotros haremos un apretado resumen de los planteamientos relevantes.

i) Según Popper, una hipótesis científico-empírica tiene una forma lógica que la hace asimétrica con respecto a los conceptos de verificabilidad y refutabilidad. Esto es, mientras no existe ningún número finito de enunciados de observación que la verifique completamente, es suficiente uno, que describa un efecto reproducible, para hacerla falsa. El enunciado capaz de convertir en falsa una hipótesis científica es llamado «*posible falsador*» de dicha hipótesis y debe ser considerado como un enunciado prohibido por ella. Asimismo, una hipótesis es en rigor científico-empírica si, y solo si, la clase de sus posibles falsadores no es vacía. De otra parte, una hipótesis afirma solo la falsedad de sus «*posibles falsadores*» y, de los enunciados compatibles con ella, lo único que puede decirse es que los permite.[40]

ii) Los «*posibles falsadores*» de una hipótesis científico-empírica son enunciados denominados «*básicos*», cuya forma lógica es la de enunciados singulares. A cambio, las hipótesis tienen la forma lógica de un enunciado general universal típico, esto es, su estructura es la de $(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx)$. Lo anterior permite afirmar, de conformidad con las reglas lógicas conocidas, que un «enunciado básico» necesita, para ser deducido de una hipótesis, que se añadan condiciones iniciales. Por tanto, **p** es un «*posible falsador*» de la hipótesis $(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx)$ si desde **p** es deducible $\sim(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx)$ y $\sim$**p** es deducible de $(\forall x)\ (Fx \rightarrow Gx)$.

iii) Dadas las hipótesis **h** y **h'** se dice que **h** es falsable en mayor grado que **h'** si la clase de los «*posibles falsadores de h*» es una subclase propia de la de los «*posibles falsadores*» de **h**. La probabilidad lógica de **h** es el complemento de su grado de falsabilidad en el siguiente sentido: la probabilidad lógica 1 corresponde al grado 0 de falsabilidad y, conversamente, la probabilidad lógica 0 corresponde al grado 1 de la falsabilidad.

iv) El objetivo del trabajo científico no es lograr hipótesis altamente probables sino hipótesis que transmitan una cantidad apreciable de información debidamente corroborada. De acuerdo a conocidos resultados de la teoría de la información, la hipótesis más probable, es aquella que tiene contenido informativo más pobre. Por tanto, el grado de confirmación (o de corroboración) no puede ser identificado con interpretación alguna

39 Lakatos, Imre (1968): *Inductive Logic*, Amsterdam, North Holland Publishing Company. Vid. el artículo de Carnap titulado *Inductive logic and Inductive Intuition*, p. 258.

40 Popper (1962), pp. 360-378.

del concepto de probabilidad, pues ello conduce a paradojas como se prueba en lo que sigue.

2.3.2. Una de las paradojas generadas por la identificación señalada en (iv) puede construirse si comenzamos escribiendo **Co(h,e)** en lugar de «***h** está corroborada o confirmada por **e***». A ello añadimos la aclaración: si el grado de corroboración fuera expresable mediante el concepto de probabilidad, significaría «***e** incrementa la probabilidad de **h***». La formulación de esto, en términos de operadores y variables, es:

$$(1)\ Co(h,e) = [\ p\ (h) < p(h,e)\ ]$$

Claramente, en la fórmula (1) se distingue entre la probabilidad absoluta de **h** y la probabilidad de **h** relativa a la evidencia **e**. Sin embargo, aunque (1) satisface la condición fundamental de considerar a una hipótesis corroborada cuando su probabilidad absoluta es menor que su relativa, no puede ser utilizada en razón de que dada la universalidad de **h** puede demostrarse:

$$(2)\ p(h) = 0 = p(h,e)$$

La justificación detallada de (2) es: (a) como **h** es siempre universal, tiene una clase infinita de «*posibles falsadores*» y, por tanto, su probabilidad lógica es igual a cero; (b) desde que **e** es una cantidad finita de datos, entonces $p(e) \neq 0$; (c) por el teorema de la multiplicación $p(e, h) = p(h) \times p(e/h)$, pero $p(h) = 0$, luego se cumple $p(h,e) = 0$.

La dificultad precedente hace pensar en la necesidad de dar una versión modificada de (1). Esto se consigue postulando $p(h) \neq 0$ y $p(e) \neq 0$. Así se obtiene:

$$(3)\ Co(h,e) \equiv [\ (\ p\ (h,e) > p(h)\ )\ v\ (\ p(e,h) > p(e)\ )\ ]$$

que establece inequívocamente en qué caso se afirma que **h** ha sido confirmada por **e**.

Ahora aplicando estos conceptos a un ejemplo, tomemos en consideración las tiradas de un dado no «cargado». Sea **h** el enunciado 'saldrá un seis', consideremos a h' igual a ~h y **e** el enunciado de información 'saldrá un número par'. Las probabilidades lógicas son

$$(4)\ p(h) = 1/6, p(h') = 5/6, p(e) = ½$$

Las probabilidades relativas de **h** y de **h'** respecto de e son

$$(5)\ p(h) = 1/3, p(h') = 2/3$$

debido a que en 1, 2, ..., 6 hay tres números pares, uno de los cuales es seis.

En virtud de (5) inferimos que la hipótesis **h** ha sido confirmada mientras que **h'** no, pues $1/3 > 1/6$ y $2/3 < 5/6$. En consecuencia, se cumplen las condiciones Co(h,e) y ~Co(h', e), aunque la probabilidad relativa de **h** es menor que la de **h'**.

Todo lo anterior demuestra que la conjunción siguiente es verdadera.

$$(6)\ Co(h,e) \wedge \sim Co(h',e) \wedge p(h,e) < p(h',e)$$

La fórmula (6) tiene la peculiaridad de demostrar que los conceptos de grado de confirmación y probabilidad son independientes entre sí. El que una hipótesis sea corroborada por cierta evidencia no implica que debe tener mayor probabilidad lógica que otra hipótesis no corroborada por la misma evidencia. Sin embargo, si se procede como Carnap, identificando la probabilidad lógica relativa con el grado de confirmación entonces la **p** que aparece en (6) puede ser reemplazada por **Co** y se cae en la contradicción

$$(7)\ Co\ (h,e) \wedge \sim Co(h',e) \wedge Co(h,e) < Co(h',e)$$

que afirma que la hipótesis **h** ha sido confirmada mas no la hipótesis **h'** (ambas con respecto a **e**), pero que el grado de confirmación de **h** es menor que el de **h'**.

El resultado expresado por la fórmula (7) sería, según Popper, la prueba más clara de que la tesis de Carnap conduce a paradojas. Ello muestra, en nuestra opinión, debilidades operacionales en el sistema de Carnap pero no anula necesariamente el esclarecimiento conceptual que ha realizado.

Inducción matemática

Aclaraciones previas

Nos ha parecido pertinente hacer una disertación sobre la lógica subyacente en el Principio de Inducción Matemática debido a las siguientes razones: 1) en la construcción de importantes demostraciones contenidas en las presentaciones axiomáticas de la lógica se utiliza este principio como regla de inferencia; 2) los trabajos en matemática, que son los que en mayor medida usan este principio, no conceden especial atención a los aspectos lógicos inherentes a su enunciación y uso; y 3) una comprensión clara del rol que juega dicho principio en la aritmética formalizada y en la metateoría es fundamental para lograr una mejor aproximación a los problemas sustantivos planteados por las filosofías dedicadas a la rigorización del conocimiento.

En este trabajo entendemos por lógica subyacente no solo los enunciados lógicos cuya validez presupone un determinado principio o teoría. A diferencia de las concepciones usuales, nosotros hemos incluido también como aspectos de la lógica subyacente en el Principio de Inducción Matemática, el uso que este tiene en el desarrollo de los sistemas lógicos, el estatuto que tiene dentro de la aritmética formalizada y las implicancias que tienen las diversas interpretaciones que pueden dársele.

Comenzaremos nuestro análisis señalando previamente que la expresión «Principio de Inducción» tiene en los medios especializados al menos tres sentidos: a) el nombre de una regla de inferencia o de una conjunción de ellas que corresponda a los planteamientos que sobre el tema hicieron Aristóteles, Bacon y Stuart Mill; b) el nombre de un enunciado formulado por Hans Reichenbach dentro de la lógica de la probabilidad; y c) una forma abreviada del nombre «Principio de Inducción Matemática».

La regla o la conjunción de reglas aludidas en primer término, no serían otra cosa que el método inductivo tradicional destinado a derivar proposiciones universales a partir de premisas que son enunciados singulares, esto es, enunciados que solo contienen predicados, nombres propios y, eventualmente, conectivas proposicionales. Claramente, el método inductivo tradicional consiste, en otros términos, en la pretensión de atribuir una propiedad a todos los elementos de un conjunto de eventos a partir de la información de que algunos eventos de dicho conjunto la tienen. Esta generalización es conocida como no conclusiva en la medida que suponer que la conclusión es falsa no conduce a contradicción.

Sin embargo, aunque una inferencia no conclusiva nos proporciona una conclusión cuya falsedad es posible, a pesar de la verdad de las premisas, es cierto que dicha proposición podría constituir la mejor aproximación que podemos lograr en el conocimiento de ciertos

eventos en un momento dado. Y es la medida o la determinación del grado de esta aproximación lo que escapó completamente al alcance de la llamada inducción clásica.

Evidentemente, la inducción clásica estaba preocupada por inferencias cuyas premisas tenían el carácter de descripciones de hechos empíricos observados, para, a partir de ellas, hacer una afirmación sobre los todavía no observados pero, en principio, observables. Por tanto, su campo de aplicación se encontraba dentro de las ciencias empíricas, especialmente las naturales, y este uso, ajeno al dominio de las disciplinas formales, fue supuesto como legítimo aunque no suficientemente esclarecido.

Hans Reichenbach ha sido uno de los filósofos que se han esforzado por rigorizar la inducción clásica. En su obra *The Theory of Probability* propone el conocido «Principio de Inducción» como una regla lógica de inferencia para derivar de modo conclusivo generalizaciones inductivas que estén expresadas dentro del lenguaje del cálculo ordinario de las probabilidades. A este principio es al que hemos hecho alusión en segundo lugar en nuestra distinción inicial y a continuación daremos una noción de él.

Reichenbach asume el concepto estadístico usual de frecuencia relativa que es, en términos del lenguaje natural, el número de veces que aparece un atributo o propiedad en una secuencia de acontecimientos, vale decir, la frecuencia con que ocurre un acontecimiento que posee el atributo en cuestión. Sobre la base del concepto anterior se define la probabilidad de un atributo en una secuencia potencialmente infinita de acontecimientos como el límite matemático de la frecuencia relativa de tal atributo. El «Principio de Inducción» de Reichenbach señala que cuando el límite de la frecuencia relativa de un atributo es calculable, entonces estamos lógicamente autorizados a afirmar que en el caso que prolonguemos la secuencia de acontecimientos tanto como se quiera, la frecuencia relativa de dicho atributo no presentará variaciones significativas, pues se mantendrá dentro de un intervalo de valores tan pequeño como se desee.

Si representamos el valor del límite como $\mathbf{h^n}$ para una sucesión indefinidamente prolongable, indicando que para el cálculo de dicho límite ha sido suficiente tomar en cuenta un número $\mathbf{n}$ de eventos. Y si denominamos $\mathbf{h^s}$ a la frecuencia relativa del atributo en cuestión en una prolongación de la secuencia hasta un número $\mathbf{s}$ de eventos tal que $\mathbf{s > n}$, entonces el «Principio de Inducción» nos permitiría afirmar que se cumplirá necesariamente la siguiente condición:

$$\mathbf{h^n - k \leq h^s \leq h^n + k}$$

en la que $\mathbf{k}$ representa una cantidad muy pequeña.

Como es comprensible, lo que sentencia Reichenbach con el «Principio de Inducción» es que las inferencias inductivas son conclusivas siempre que sea posible calcular el valor de la probabilidad de un atributo. En consecuencia, se trataría de un principio lógico aplicable solo a conjuntos o masas de eventos y no a un individuo, que en este caso carece de significación para objetar su validez, pues la existencia de un contraejemplo no conduce a contradicción. Por tanto, este principio, según Reichenbach, constituye la regla de inferencia fundamental en las ciencias empíricas, que de esta manera en sus operaciones de generali-

zación y predicción deberían abandonar la inducción clásica y utilizar las reglas del cálculo de las probabilidades.

A la tercera interpretación de la expresión «Principio de Inducción» dedicaremos la parte siguiente de esta exposición.

Planteamiento inicial del problema

En matemática es frecuente razonar sobre conjuntos infinitos, los cuales de una manera intuitiva pero no rigurosa son concebidos como sucesiones de elementos que pueden ser prolongadas indefinidamente[41]. El ejemplo más conocido es el conjunto de los números naturales, o el de los enteros no negativos, que lo intuimos como una sucesión tan larga como se desee. Por necesidad matemática o de otro tipo a menudo es necesario demostrar que una determinada propiedad es poseída por todos los elementos del conjunto de los números naturales y esto no puede hacerse probando que cada elemento del conjunto tiene la propiedad porque este expediente nos llevaría a un procedimiento infinito, que no reuniría las condiciones de una demostración porque no nos permitiría jamás llegar a una conclusión.

La regla de deducción denominada *Modus Ponens*, que se utiliza frecuentemente en las demostraciones lógicas y matemáticas, resulta insuficiente en este caso. Pues si ocurriera que comprobamos que el primer elemento del conjunto tiene la propiedad **P** y que de esto se deduce que el segundo elemento del conjunto tiene la propiedad **P**, podríamos por *Modus Ponens* derivar que el segundo elemento del conjunto tiene la propiedad **P**, pero para probar lo mismo de los otros elementos necesitaríamos un número infinito de aplicaciones de la mencionada regla de deducción, lo que haría nuestro trabajo interminable. Asimismo no podría ocurrir que de probar que el primer elemento tiene la propiedad **P** se deduzca que todos sus sucesores la tengan, pues no existe regla lógica conocida para probar que lo que se cumple para un individuo puede ser generalizado para todos los individuos de un conjunto infinito. La prueba tampoco puede hacerse por inspección de todos los sucesores ya que ellos constituyen un conjunto infinito. En consecuencia, puesto que a nivel de las estructuras formales, como lo son las lógicas y las matemáticas, se necesita una regla de inferencia que permita efectuar generalizaciones sobre conjuntos infinitos, esta no puede ser del tipo *Modus Ponens*.

Se conoce con el nombre de Principio de Inducción Matemática o Quinto Postulado de Peano a una proposición que supera las limitaciones del *Modus Ponens* y permite demostrar de manera incontrovertible que todos los elementos del conjunto infinito de los números naturales o de cualquier conjunto enumerable poseen una cierta propiedad **P** si se satisface ciertas condiciones. De dicho principio se formulan dos versiones conocidas como la enunciación débil y la enunciación fuerte. Esta proposición parece, al menos formalmente, en algún sentido, inductiva como el principio antes mencionado de Reichenbach, pero se diferencia de este en que, por ser aplicable a estructuras lógicas y matemáticas, es tan segura como el *Modus Ponens* y por tanto, permite derivar conclusiones mucho más fuertes que las formuladas dentro de un intervalo de valores de probabilidad. En consecuencia, en los casos en los que se aplica el Principio de Inducción Matemática, cada individuo es relevan-

41 La definición rigurosa de conjunto infinito debida a Cantor y Dedekind es: «Un conjunto es infinito si y solo si existe una correspondencia «uno a uno» entre él y un subconjunto propio de él». (Vid. Hao Wang, *Logic, Computers, and Sets*, p. 77).

te y, por ende, la construcción de un contraejemplo debe conducir a contradicción, lo que asegura que las proposiciones mediante él demostradas, son universalmente verdaderas en sentido estricto.

En la sección siguiente daremos algunas referencias sobre la enunciación de dicho principio para luego exponer esquemáticamente cada una de las versiones que hemos distinguido unas líneas antes.

Breves referencias a la enunciación del Principio de Inducción Matemática

La formulación del Principio de Inducción Matemática parece muy ligada a los esfuerzos por axiomatizar la aritmética. Así que se lo encuentra entre los axiomas de Grassmann[42] contenidos en su libro *Lehrbuch der Arithmetik* publicado en 1861. Los diez axiomas de dicho autor y sus cuatro definiciones constituyen probablemente el primer esfuerzo por axiomatizar la aritmética.

El matemático italiano Giuseppe Peano publicó en 1889 un libro escrito en latín titulado *Arithmetices principia*[43] (Los principios de la aritmética). En esta obra se formula como las nociones primitivas, a partir de las cuales es posible definir cualquier otro concepto aritmético o construir cualquier proposición significativa del sistema, las de «número», «uno», «sucesivo» y «es igual a». Inmediatamente se procede a formular nueve axiomas construidos sobre la base de estas nociones primitivas, los cuales informalmente pueden ser enunciados como sigue:

1 es un número

Si $\boldsymbol{a}$ es un número, entonces $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números, entonces $(\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a})$

Si $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ son números, entonces si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ entonces $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}$

Si $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}$ es un número, entonces $\boldsymbol{a}$ es un número

Si $\boldsymbol{a}$ es un número, entonces su sucesivo también es un número

Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son números diferentes, entonces tienen diferentes sucesivos

Ningún número tiene como sucesivo al número **1**

Cualquier propiedad que pertenece a **1**, y también al sucesor de cualquier número que tiene la propiedad, pertenece a todos los números (interpretación informal).

Los axiomas **a2.**, **a3.**, **a4.** y **a5.**, están formuladas fundamentalmente en base a la noción primitiva de «es igual a» y son por tanto utilizables también en teorías distintas a la aritmética. Por esta razón tales axiomas y la noción primitiva que los constituye son considerados

42 Según Polya, en *Matemática y razonamiento plausible*, el primero en conocer el método de la inducción matemática fue Pascal: Esta información la ha tomado de las investigaciones de Freundenthal.

43 La versión de *Arithmetices principia* consultada es la publicada por van Heijenoort en *From Frege to Gödel*, (Ed. Harvard University Press, 1967) pp. 83-97.

actualmente como pertenecientes a la lógica subyacente del sistema, lo que lleva a tipificar solo a los cinco axiomas restantes como propiamente aritméticos en el sistema de Peano. Asimismo, es importante señalar que al efectuar la explicación del caso, Peano indica que la noción primitiva de «número» es la de entero positivo, o lo que usualmente se denomina número natural, cuando se añade el cero.

Es pertinente señalar que los axiomas aritméticos antes anotados, fueron tomados por Peano del matemático Dedekind, lo que se deduce del texto de la carta que este dirigió al doctor. Keferstein en febrero de 1890. La carta de Dedekind, publicada en inglés por el profesor Hao Wang, muestra claramente cómo en base a las nociones de conjunto y de aplicación puede definirse el concepto de cadena, que permite a su vez definir el conjunto de los números naturales como un conjunto simplemente infinito. Desde esta definición se derivan de manera sencilla los enunciados convencionalmente conocidos como axiomas de Peano.

Enunciación débil del Principio de Inducción Matemática

La enunciación débil del Principio de Inducción Matemática[44] puede hacerse informalmente de la siguiente manera: «Si un teorema es válido para el número **1** y se demuestra que es verdadero para ***n+1*** siempre que lo sea para ***n***, será verdadero para todos los números enteros». Esta formulación tomada de Henry Poincaré[45] parece algo posterior a la de Peano que fue publicada en 1889. Es interesante anotar que en esta versión no aparece explícito que la segunda condición establecida por el principio es de la forma de una proposición condicional, en la que el antecedente está constituido por la postulación de que el teorema se cumple para **n** y el consecuente por la afirmación implicada por dicha postulación, que sentencia que el teorema se cumple para **n+1**. Esta implicación lógica está planteada sutilmente en la formulación de Poincaré por la expresión «es verdadero para **n+1** siempre que lo sea para **n**». Sobre la naturaleza de esta implicación haremos algún comentario más adelante.

Peano en su noveno axioma, que resulta el quinto cuando se suprimen los cuatro referentes a la igualdad, formula el Principio de Inducción Matemática, en su versión débil, de una manera que hace explícitos algunos de sus supuestos, valiéndose para ello de la fuerte capacidad expresiva que le brinda el uso del lenguaje de la lógica proposicional y de la lógica de las clases. Nosotros luego haremos una interpretación algo menos informal de la versión de Peano cuya característica más relevante será introducir la noción de propiedad en lugar de la de clase. Asimismo, usaremos el operador condicional en el sentido que ordinariamente se usa en la lógica actual, lo que ciertamente introduce una variante en la medida que Peano no definió el condicional en términos de valores de verdad sino intuitivamente, en términos de «desde ***a*** se deduce ***b***», lo que explica algunas imperfecciones en el aparato deductivo de su sistema, como lo señala Van Heijenoort en la parte correspondiente de *From Frege to Gödel*. Entre estas imperfecciones la mayor es la ausencia de una regla de inferencia que permita separar el antecedente del consecuente, lo que obliga al lector a legitimar intuitivamente los pasos de la demostración, que aparece como una lista de fórmulas independientes, a quien se rige estrictamente por las reglas del sistema. Esto revela indudablemente que la formalización de la aritmética propuesta por Peano era incompleta.

44 En esta sección todas nuestras alusiones serán a la versión débil de este principio, salvo que se anote alguna otra especificación.
45 Citado por A. Salazar en *Irrealidad e Idealidad*, p. 109.

La interpretación que damos al enunciado conocido como el quinto postulado de Peano es la siguiente:

Supongamos que para los objetos del universo del discurso existe una propiedad P (x) tal que los dos siguientes enunciados son verdaderos:

P (1) (1 tiene la propiedad P)

Para cualquier número entero positivo x,

Si P (x) entonces P (x+1)[1]

Para todo x, es verdad P (x) $((\forall x)\ P(x))$

Es pertinente anotar, antes de seguir adelante, que en las presentaciones que usualmente se hacen del Principio de Inducción Matemática puede apreciarse variaciones respecto a la elección del primer número al que es aplicable. Algunos autores comienzan señalando que la primera condición debe cumplirse para el número **1** y otros que debe ser satisfecha por el número **0**. Aunque una u otra opción no altera fundamentalmente los resultados, parecería que debido a que el referido principio es aplicable a demostraciones en conjuntos distintos al de los números naturales pero coordinables biyectivamente con él, es más cómodo suponer por ahora que el primer número natural es el **1**, como podrá apreciarse en la demostración que ofrecemos como segundo ejemplo. En dicha demostración se aplica el Principio de Inducción Matemática sobre el conjunto enumerable de las longitudes de las fórmulas bien formadas de un sistema lógico dado, estableciéndose que la longitud mínima de una fórmula es igual a **1**.

Examinando ahora la versión que hemos dado del llamado Quinto Postulado de Peano, encontramos que se comporta como una regla de inferencia que nos permite derivar desde la verdad de las proposiciones designadas por **1** y **2** la verdad de la proposición designada por **3**. El esquema puede ser expresado como sigue:

«Si es verdad **1** y es verdad **2**, entonces es verdad **3**»

Consecuentemente, para efectuar demostraciones utilizando esta regla, es necesario probar, en cada caso, la verdad de cada una de las condiciones **1** y **2**, para luego, al amparo del Principio de Inducción Matemática, inferir la verdad de la proposición **3** probar la verdad de la condición **1** usualmente es muy sencillo. Normalmente la tarea más laboriosa en una demostración de este tipo es probar la verdad de la condición **2** que tiene la forma de un condicional con el antecedente verdadero por postulación, lo que exige necesariamente probar la verdad del consecuente para que el condicional, como un todo, sea verdadero y se satisfaga la condición **2**. Esta peculiar estructura de la condición **2** hace posible que para probar su verdad sea aplicable la regla lógica de la prueba condicional que autoriza a tomar como premisa el antecedente para derivar el consecuente y, luego, afirmar la verdad de todo el condicional independientemente de la premisa usada. A

manera de ejemplo, demostraremos por inducción débil que para cualquier entero ***n*** la suma de la sucesión:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

A fin de precisar el funcionamiento de la demostración y de ganar claridad, la dividiremos en tres partes: a) la primera, I, para probar la verdad de la condición 1.; b) la segunda, II, para probar la verdad del condicional que expresa la condición 2.; c) la tercera, III, en la que simplemente se realiza la llamada generalización inductiva.

$$\text{I. La igualdad: } 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

es verdad para **n = 1**, pues en este caso el miembro izquierdo de la igualdad es igual a 1 y el derecho también.

Como el condicional que debe probarse como segundo paso debe ser válido para cualquier número ***n***, elegido arbitrariamente, entonces la variable ***n*** puede ser cuantificada universalmente sin ninguna dificultad. Por tanto, debemos probar la verdad de la siguiente proposición:

$$(\forall n)\left[1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right] \rightarrow \left[1 + 2 \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)\,((n+1)+1)}{2}\right]$$

Aplicando la regla lógica de la prueba condicional la demostración se desarrolla como sigue:

L1. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ Premisa para PC.

L2. $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$

L3. $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2\,(n+1)}{2}$

L4. $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2}$

L5. $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}$

L6. $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\,((n+1)+1)}{2}$

L7. $\forall n(L6)\ (\forall n)\ (\ldots L6 \ldots)$

El paso L6 se justifica por P.C. en 1 - 5.

El paso L7 Se justifica por G.U. en 6.

III. La tercera parte de la demostración tiene la función de generalizar que todo número **n** que satisface las condiciones **1** y **2**, cumple con el teorema propuesto:

$$(\forall n)\left[1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

Evidentemente, en la demostración realizada se asumen como premisas, además, de la línea L1, las proposiciones del sistema de la aritmética que establecen las propiedades más conocidas de los enteros tales como la asociatividad de la adición, etc. La manera explícita de cómo funcionan estas premisas no ha sido expresada, pero puede afirmarse que se comportan como tales en la medida que su validez ha sido presupuesta. Aunque los matemáticos normalmente no hacen explícitos el operador condicional, los cuantificadores ni la regla de deducción de PC., el hecho de que nosotros no los hayamos obviado, no significa todavía un análisis explícito de la lógica subyacente en la aplicación del Principio de Inducción Matemática.

Enunciación fuerte del Principio de Inducción Matemática

Se conoce con el nombre de versión fuerte del Principio de Inducción Matemática a una formulación que incluye una variante en la segunda condición establecida para derivar la llamada generalización inductiva.

Mientras que en la condición **2** de la versión anterior, desde la suposición de que un número arbitrariamente elegido tiene la propiedad **P**, se trata de probar que su sucesivo también la tiene, en este caso el presupuesto parece ser más exigente, pues de la postulación de que todos los elementos menores que cualquier número **n** tienen la propiedad **P**, debe probarse que también n tiene la propiedad **P**.

La formulación del Principio de Inducción Fuerte es como sigue:

P (1)

Para cualquier **n** arbitrario, si **P (k)**

para cualquier **k < n**, entonces **P (n)**

Por tanto, $((\forall n)P(n))$[46]

Esta enunciación también asume, como la anterior, la existencia de una propiedad **P(x)** para los individuos del universo del discurso, que satisfaga las condiciones **1** y **2**. Es interesante anotar de otra parte, que esta segunda versión goza de la preferencia de algunos

46 Tomado de Irving Copi *Symbolic Logic*, tercera edición, p. 209. La versión fuerte no es independiente de la débil en tanto es demostrable usando como regla de inferencia a esta última.

autores conocidos que la utilizan, por ejemplo, para la demostración del conocido teorema de la deducción. Al respecto pueden verse las partes correspondientes de los muy utilizados libros *Symbolic Logic, Introduction to Mathematical Logic y Mathematical Logic* de Copi, Mendelson y Kleene, respectivamente.

Asimismo, de usarse cuantificadores en la formulación anterior, entonces ocurre que tanto ***n*** como ***k*** son variables que deben ser cuantificadas universalmente, pues la cuantificación existencial de ***n*** conduciría el error de afirmar la existencia del mayor número natural.

Ejemplificaremos con una demostración muy sencilla el uso del Principio de Inducción Matemática, versión fuerte. Probaremos, siguiendo a Copi en lo fundamental, que un sistema lógico que contiene los signos proposicionales **P, Q, R, S**, ... y solamente los operadores de disyunción «V» y conjunción «Λ» es funcionalmente incompleto en el sentido de que no puede expresarse en él la función de verdad conocida como la negación conjunta[47] u operador «daga», que asume el valor verdadero cuando todos sus argumentos asumen el valor falso.

Con el objeto de establecer correspondencia entre el conjunto de fórmulas del sistema dado y el conjunto de los números naturales, definiremos el concepto de longitud de una fórmula, lo que no hace Copi explícitamente en *Symbolic Logic*, p. 210.

Longitud de una fórmula F = Df. Es el número **n** de signos de que consta F sin contar los paréntesis y contabilizando cada ocurrencia de **P, Q, R, S**, ... «V» y «Λ» como un signo distinto. Por ejemplo la longitud de «**P V P**» es igual a **3**.

En lo que sigue desarrollamos la demostración.

Probaremos que una fórmula de longitud igual a **1** no puede ser verdadera si sus componentes son falsos.

Cuando una fórmula **g (P, Q, R,** ...) tiene longitud igual a **1** tiene solamente un signo y este necesariamente, debe ser solamente una letra proposicional **P**, o **Q**, o **R**, o ... pues de otro modo no sería una fórmula bien formada. En tanto que los argumentos **P, Q, R,** ... han sido postulados todos como falsos, desde esta premisa **g (P, Q, R,** ...) no puede ser una fórmula verdadera desde que es necesariamente igual a uno de sus argumentos. Por tanto hemos satisfecho la primera condición al demostrar que una fórmula de longitud igual a **1** tiene la propiedad de no ser verdadera cuando todos sus componentes son falsos.

II. Para probar la condición **2** asumiremos que cualquier fórmula bien formada que tiene una longitud menor que **n** no tiene el valor verdadero cuando todos sus argumentos son falsos. Desde esta postulación demostraremos que cualquier fórmula bien formada que tenga una longitud igual a **n** no puede tener valor verdadero cuando todos sus componentes son falsos.

47 El nombre de negación conjunta es usado por Quine en su libro *Lógica matemática* (Rev. de Occidente, 1972, p. 63). Este operador y el de incompatibilidad serían debidos a H.M. Sheffer (puede verse la versión dada por Whitehead y Russell en la introducción a la segunda edición de *Principia Mathematica* (1927). Posteriormente Njcod (1916), usando solo el operador de incompatibilidad, desarrolló la lógica proposicional. León Post (1921) aprovechó los resultados de Nicod y también trabajó el operador de incompatibilidad. Este operador fue generalizado a la lógica de predicados por Moses Schöfinkel mediante la función U en un trabajo que presentó en 1920 a la Sociedad Matemática de Göttingen.

Examinemos una fórmula bien formada arbitrariamente tomada como **g (P, Q, R, ...)** la que tiene longitud **n y n > 1.** Como es una fórmula bien formada entonces debe tener una de las dos formas siguientes:

f1. g_1 (P, Q, R, ...) . g_2 (P, Q, R, ...)

f2. g_1 (P, Q, R, ...) v g_2 (P, Q, R, ...)

donde $\mathbf{g_1}$ **(P, Q, R,** ...) y $\mathbf{g_2}$ **(P, Q, R,** ...) son fórmulas bien formadas que tienen una longitud menor que **n.** Por tanto, de conformidad con la postulación hecha anteriormente, cada una de dichas fórmulas es falsa cuando sus respectivos argumentos **P, Q, R,** ... son todos falsos. Consecuentemente, dadas dos fórmulas cada una de las cuales es falsa, tanto la conjunción como la disyunción de longitud **n** que con ellas se construyan también serán falsas. Por consiguiente, cualquier fórmula **g (P, Q, R,** ...) de longitud **n,** donde **n** ha sido tomado arbitrariamente, tiene el valor falso en este caso.

III. De esta manera, hemos probado en los parágrafos **I.** y **II.** que las condiciones **1** y **2** son verdaderas; luego, apoyándonos en el Principio de Inducción Matemática, versión fuerte, podemos afirmar que toda fórmula bien formada del sistema que contiene los signos **P, Q, R,** «V» y «Λ» tiene la propiedad de no ser verdadera cuando sus argumentos son falsos. Es decir que en dicho sistema no se puede expresar la función de negación conjunta y, consecuentemente, no es funcionalmente completo.

Necesidad del uso del Principio de Inducción Matemática en las demostraciones lógicas

El Principio de Inducción Matemática, ya sea en su versión débil o en su versión fuerte, resulta de particular interés teórico, debido a que solo en los niveles muy elementales de la lógica se puede prescindir de su empleo. Si embargo, cuando se desea dejar el nivel intuitivo y se precisa dar una demostración aún de algunas propiedades muy conocidas, entonces las usuales reglas lógicas, como el *Modus Ponens,* resultan completamente insuficientes para legitimar una prueba.

Por citar solo un ejemplo, tomado de la lógica proposicional, anotaremos que sería muy difícil dar una prueba no inductiva para la conocida tautología de De Morgan generalizada a fórmulas de una longitud **n** arbitrariamente elegida.

En cambio, aplicando el Principio de Inducción Matemática, resulta sencillo probar la validez para todo **n**, de la siguiente fórmula:

$$\sim(\mathbf{A_1} \vee \mathbf{A_2} \vee \ldots \vee \mathbf{A_n}) \equiv \sim\mathbf{A_1} \wedge \sim\mathbf{A_2} \wedge \ldots \wedge \sim \mathbf{A_n}$$

Para desarrollar la demostración es suficiente aplicar el mencionado principio sobre el número de argumentos de la fórmula o también sobre el número de ocurrencias del operador «V» de disyunción. El componente derecho puede ser interpretado fácilmente como la pro-

piedad que, por una tabla sencilla, sabemos que satisface la condición **1** y, luego, mediante un razonamiento simple, se puede probar que dicha propiedad es poseída por el consecuente de la condición **2**, asumido que la posee el antecedente.

De otra parte, en las presentaciones axiomáticas de la lógica, encontramos que existe un metateorema que es utilizado, en lo que podría llamarse las axiomatizaciones clásicas, como una poderosa regla de inferencia. Estamos aludiendo a un metateorema conocido como Teorema de la deducción, cuya demostración inicial es comúnmente atribuida a Herbrand en su trabajo titulado *Investigaciones en teoría de la prueba: las propiedades de las proposiciones verdaderas,* publicado en 1930. La prueba que se da para este teorema, a nivel de la lógica proposicional o de una teoría de primer orden, presupone la validez del Principio de Inducción Matemática, usado en la llamada versión fuerte.

Por otro lado, prescindir de la inducción matemática en la demostración del Teorema de la deducción, no es una posibilidad que se muestre clara, pues en la medida que en las presentaciones axiomáticas generalmente solo se usa como regla de deducción el *Modus Ponens,* resulta comprensible que con esta regla no se tiene un instrumento suficiente para probar un metateorema que es válido para toda demostración que conste de cualquier número **n** de líneas, pues las sucesivas aplicaciones del *Modus Ponens* no garantizan la generalidad, en este caso, deseada y, de ser efectuadas, nos conducirían a un proceso indefinidamente prolongable (*regressus ad infinitum*) que no reuniría los requisitos de una prueba conclusiva.

Por ser particularmente relevante para nuestros planteamientos, presentaremos a continuación una prueba del Teorema de la deducción para el cálculo proposicional clásico, la cual ha sido desarrollada por Elliot Mendelson, en su libro *Introduction to Mathematical Logic,* como la proposición 1.8. Hemos decidido seguir a Mendelson debido a que la comprensión de la demostración que formula solo demanda tres axiomas, del *Modus Ponens,* del teorema de la identidad y evidentemente del Principio de Inducción Matemática. En cambio Kleene y Copi, en sus manuales *Symbolic Logic* y *Mathematical Logic* desarrollan 10 y 16 teoremas, respectivamente, antes de dar una prueba para el mencionado resultado. En algunos manuales introductorios se presentan pruebas que, por no ser rigurosas, no las hemos considerado. Los axiomas a utilizarse en la demostración son las fórmulas siguientes:

A1. $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

A2. $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

A3. $((\sim B \rightarrow \sim A) \rightarrow ((\sim B \rightarrow A) \rightarrow B))$[48]

La regla lógica de demostración es el *Modus Ponens,* como ya lo indicáramos antes, y el teorema de la identidad es la fórmula $\vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$.

48 Hay que anotar que el sistema de axiomas dado por Mendelson para la lógica proposicional es más simple que el de Russell y Whitehead y que las representaciones usuales del Hilbert Bernays y del Hilbert Ackermann. Sistemas de tres axiomas son también el de J. Robbin, el de Rosser y el de Lukasiewicz. Este último parece haber sido el primero en usar un sistema de solo tres axiomas para el cálculo proposicional, en 1929, según lo señala en su libro *Aristotle's Syllogistic,* p. 80.

Como paso previo, es conveniente formular una definición precisa de Prueba de **A** desde un conjunto de fórmulas bien formadas **J**, que son denominadas las premisas de la prueba. La expresión se lee «**Prueba de A desde J** ».

Definición de «**Prueba de A desde J**». **Df** = Es una secuencia de líneas $\mathbf{A_1}$, ..., $\mathbf{A_n}$, tal que $\mathbf{A} = \mathbf{A_n}$ y para cada **i**, o $\mathbf{A_i}$ es un axioma, o A_i pertenece a **J**, o A_i es una consecuencia directa obtenida por alguna regla de deducción (en este caso el *Modus Ponens*) de líneas precedentes de la secuencia.

Enunciado del Teorema de la Deducción: Si **J** es un conjunto de fórmulas bien formadas (**fbfs**) y **A** y **B** son **fbfs**, y **J**, **A** , luego $\mathbf{J} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$.

La demostración de esta proposición es como sigue:

I. Sea $\mathbf{B_1}$ ..., $\mathbf{B_n}$ una Prueba de **B** desde $\mathbf{J} \cup \{\mathbf{A}\}$, en la que $\mathbf{B_n} = \mathbf{B}$. En esta etapa de la demostración probaremos que el enunciado del teorema se cumple para $\mathbf{i} = \mathbf{1}$, esto es, que la afirmación es lógicamente construible desde las premisas formuladas en el teorema y desde los axiomas. Por definición de prueba, solo puede estar en alguna de las tres siguientes condiciones y todas ellas conducen al establecimiento de $\mathbf{J} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B_1}$.

Caso a: $\mathbf{B_1}$ puede ser miembro de **J**; **Caso b**: $\mathbf{B_1}$ puede ser un axioma; **Caso c**: $\mathbf{B_1}$ puede ser A. Como en virtud del axioma $\mathbf{A_1}$, $(\mathbf{B_1} \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B_1}))$ es también un axioma, por tanto, para los casos **a** y **b** se puede aplicar *Modus Ponens* mediante la afirmación de $\mathbf{B_1}$ lo que permite el establecimiento es $\mathbf{J} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B_1}$.

En el caso **c** cuando $\mathbf{B_1}$ es **A**, ocurre que es un teorema debido a que es el Principio de Identidad, previamente demostrable, y, por tanto, se cumple

$$\mathbf{J} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B_1}.$$

II. Probaremos ahora que para nuestro metateorema, la condición **2** de la versión fuerte del Principio de Inducción Matemática se cumple. Para ello asumiremos que se cumple para todo **k** menor que cualquier **i** arbitrariamente elegido. Desde esta postulación probaremos que es verdad. Por definición de prueba se plantean cuatro casos posibles para $\mathbf{B_i}$: a) $\mathbf{B_i}$ es un axioma; b) $\mathbf{B_i}$ está en **J**; c) $\mathbf{B_i}$ es **A**; y d) $\mathbf{B_i}$ se sigue por *M.P.* desde $\mathbf{B_j}$ y $\mathbf{B_m}$ de tal manera que el subíndice **j** es menor que **i**, el subíndice **m** es menor que **i** y la fórmula $\mathbf{B_m}$ es de la forma $\mathbf{B_j} \rightarrow \mathbf{B_i}$. En los tres primeros casos; como en la primera parte de la demostración, por axioma $\mathbf{A_1}$., *Modus Ponens* y Teorema de identidad, es legítima la afirmación de $\mathbf{J} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B_i}$.

En el caso **d**), en tanto que hemos asumido que el teorema se cumple para todo **k** menor que **i**, entonces podemos afirmar la validez de $\mathbf{J} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B_j}$. y de $\mathbf{J} \vdash \mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B_j} \rightarrow \mathbf{B_i})$ (donde $\mathbf{B_j} \rightarrow \mathbf{B_i}$ es la fórmula $\mathbf{B_m}$), pues ya hemos asumido $\mathbf{j} < \mathbf{i}$ y $\mathbf{m} < \mathbf{i}$. Consecuentemente, por axioma $\mathbf{A_2}$ establecemos $(\mathbf{A} \rightarrow (\mathbf{B_j} \rightarrow \mathbf{B_i})) \rightarrow ((\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B_j}) \rightarrow (\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B_i}))$, y desde estas fórmulas, mediante dos aplicaciones del *Modus Ponens*, podemos afirmar $\mathbf{J} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B_j}$.

III. Habiendo probado que se satisfacen las condiciones **1** y **2** del Principio de Inducción Matemática, el próximo paso es generalizar el teorema para todo **i** y, por tanto, como **i** = **n**, para cualquier **n**, esto es, para pruebas de cualquier número de líneas:

$$(\forall_i)(\vdash \mathbf{J} \vdash \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}_i)$$

Es pertinente señalar que la prueba antes desarrollada, además de rigurosa, es breve y bastante más accesible al lector no especializado que otras presentaciones. En español puede verse la demostración generalizada de este teorema en el libro de M. Sacristán *Introducción a la lógica y al análisis formal*, pp. 163 - 172. Sin embargo, la exposición de dicho autor, hecho desde los axiomas del sistema Hilbert Bernays, es varias veces más larga que la elegida para este trabajo.

La demostración del metateorema anterior tiene especial interés teórico debido a que demanda la utilización del Principio de Inducción Matemática fuerte como una regla de inferencia que no aparece explícita en los lenguajes lógicos en los cuales se la presupone. Si consideramos que tal vez la característica fundamental de la lógica contemporánea es la pretensión de realizar derivaciones de acuerdo a reglas definidas y explícitas, entonces resulta sorprendente que en las presentaciones axiomáticas de la lógica se asuma, sin mostrar mayor interés en dar justificación alguna, la validez del mencionado principio como si se tratara de una regla de deducción muy especial y, ciertamente, lo suficientemente evidente como para tomarse la molestia de hacerla explícita.

El afirmar que el Principio de Inducción Matemática no se enuncia expresamente en las axiomatizaciones convencionales porque se lo emplea para demostrar metateoremas que, como tales, no pertenecen al sistema presentado, no sería una justificación satisfactoria, puesto que usualmente también es necesario definir explícitamente las propiedades metalingüísticas. Asimismo, la presencia de teoremas como la equivalencia de De Morgan, antes señalada, dentro de un cálculo, está expresando la necesidad de asumir dicho principio como una regla de inferencia aplicable en nivel del lenguaje objeto.

Además, el estatuto del Principio de Inducción Matemática en las presentaciones axiomáticas no es semejante al del *Modus Ponens*, pues esta última regla no necesita ser justificada intuitivamente debido a que puede expresársela fácilmente mediante una tautología, y, por este medio, probarse que se trata de una regla de deducción respecto a la cual la propiedad de ser verdadero es hereditaria. En cambio el principio mencionado no tiene la forma de una tautología ni de una fórmula predicativa lógicamente válida, razón por la que no puede, probarse que se trata de una regla de deducción respecto a la cual la propiedad de ser verdadero es hereditaria.

De otra parte, la presencia del Quinto Postulado de Peano en las pruebas lógicas no solo plantea la cuestión relacionada con su legitimidad sino también la referente a la insuficiencia de las reglas de deducción, tradicionalmente lógicas, para la derivación de todas las consecuencias que se derivan de los axiomas. Los tratadistas generalmente no consideran al Principio de Inducción Matemática como una regla de inferencia de tipo lógico sino que admiten sin discusión su carácter matemático irreductible. Esta es la razón que está implícita

en la universal aceptación de la reducción de los axiomas de Peano de nueve a cinco, que supone que solo los cuatro axiomas referentes a la identidad no son aritméticos y pertenecen, por tanto, a la lógica subyacente del sistema. De esta manera, se instituye al Principio de Inducción Matemática en una proposición estrictamente privativa de una teoría aritmética o aritmetizable. En consecuencia, una formalización de la aritmética, desde esta perspectiva, debe incluir entre sus axiomas extra lógicos al principio materia de este artículo.

Asimismo, si es cierto que en una axiomatización lógica se puede prescindir del Teorema de la deducción con sola condición de que no se permitan pruebas desde hipótesis o premisas, también lo es que esta limitación empobrecería mucho el uso del método axiomático, lo que sería pagar un precio muy caro por prescindir del uso de la inducción matemática. Por otra parte, este recurso no evitaría la necesidad de realizar demostraciones válidas para conjuntos infinitos no solo en la matemática pura sino también en la aplicada, como es el caso de la teoría de los lenguajes de máquinas.

Modus Ponens vs. verdades inductivas en matemática

Ciertamente un argumento de hecho para justificar una reflexión sobre el *Modus Ponens* (al que en adelante nos referiremos usando la abreviación MP), puede estar dado por la constatación de que los sistemas lógicos que podemos denominar fundacionales[49] lo utilizan como única regla primitiva de inferencia. Asimismo, evidentemente, la solvencia de los sistemas que lo usan no se reduce al mero hecho de ser conocidos sino que han devenido en tales en la medida que han satisfecho de manera lógicamente demostrada importantes propiedades metateóricas[50] y por esta razón se ha recurrido a ellos como a un criterio de validez concurrente. Para citar sólo un ejemplo de este modo de proceder, el notable investigador Hao Wang, para probar que un sistema lógico S es completo, en su trabajo *Some formal details on predicative set theories*[51], prueba que S es equivalente a un sistema S' del tipo Hilbert-Bernays cuya propiedad metateórica de compleción es conocida y, por este expediente, establece el teorema.

Sin embargo, no es el propósito del presente trabajo hacer un análisis del estatuto especial que tiene el MP como regla de inferencia en los sistemas lógicos ni defender tesis alguna acerca de lo que pueda considerarse su naturaleza misma. Lo que pretendemos fundamentalmente es examinar el tipo de relación que existe entre la mencionada regla de inferencia y un principio conocido e importante como es el llamado Principio de Inducción Matemática (PIM) o quinto postulado de Peano[52], que de una manera informal e intuitiva puede formularse en términos de: «Si su teorema es válido para el número 1 y si se demuestra que es verdadero para n + 1 siempre que lo es para n, será verdadero para todos los números enteros». El sentido de nuestro análisis estará dirigido hacia los presupuestos lógicos del quehacer matemático y a aclarar que el PIM no tiene nada de inductivo como a veces creen quienes solo están en condiciones de mencionarlo o de aplicarlo sin conocer los mecanismos deductivos que constituyen su lógica subyacente. En esa dirección, el objetivo de este artículo es doble: 1) Demostrar razonablemente que el PIM, expresado por el quinto postulado de Peano es, en lo principal, una estrategia de demostración o prueba que presupone de manera necesaria y compacta $\aleph_0$ aplicaciones del Modus Ponens (esta hipótesis no es más riesgosa que asumir que el conjunto **N** tiene como número cardinal al primer cardinal transfinito); y

49 A fin de ser precisos indicamos que consideramos sistemas fundacionales: el de Whitehead y Russell, el de Hilbert y Bernays, el de Rosser, el de Lukasiewicz, etc. El hecho de que estos sistemas utilizan el MP como única regla primitiva de inferencia puede ser constatado en el caso de Whitehead y Russell revisando el primer volumen de *Principia Matemática* (p. 94). En el caso del sistema Hilbert-Bernays puede recurrirse a la presentación hecha por Manuel Sacristán en *Introducción a la lógica y al análisis formal* (p. 110). La presentación de Sacristán ha sido tomada de *Grundzüge der theoretischen Logik*. Respecto al sistema de Rosser puede consultarse la clara presentación hecha por Copi en *Symbolic Logic* (p. 201). El sistema de Lukasiewicz que hemos aludido es el presentado por este autor en su obra *Aristotle's Syllogistic* (p. 80). En todos estos sistemas el MP es la única regla primitiva de inferencia en el sentido de que es la única que permite realizar la operación de separación *(detachment)*, consistente en independizar el consecuente de un condicional de su respectivo antecedente, y en el de que cualquier otra regla de inferencia se deriva en ellos como teorema por un número finito de aplicaciones del MP.

50 Consideramos propiedades metateóricas de un sistema la consistencia, la complexión, la decidibilidad, etc. que algunos tratadistas prefieren denominar *epiteóricas*, como Haskell Curry que reserva la palabra 'metateoría' para referirse a un conjunto muy específico de cuestiones que se afrontan desde el punto de vista lingüístico y filosófico, de modo que la metateoría queda incluida en la *epiteoría*.

51 Este trabajo está contenido en el libro de Hao Wang titulado *Logic, Computer and Sets*, New York, Chelsea Publishing Company, 1970, p. 585.

52 Según Polya, en *Matemática y razonamiento plausible*, el primero en conocer el método de demostración por inducción matemática fue Pascal. Esta información la ha tomado de las investigaciones de Freundenthal.

2) Proporcionar al menos una buena razón para desvirtuar la tesis de Henri Poincaré quien sostenía que el Principio de Inducción Matemática era un ejemplo de lo que Kant denominó juicios sintéticos a priori.

Nuestras tesis la probaremos en cuatro partes. En la primera mostraremos la función del MP en las pruebas por inducción matemática. En la segunda examinaremos la función del MP en las formalizaciones lógicas de la aritmética. En la tercera parte haremos una extensión, interesante fundamentalmente para los lectores no-matemáticos, de nuestra tesis al llamado principio de inducción fuerte y en la cuarta parte mencionaremos un resultado que prueba razonablemente que el PIM no satisface la definición kantiana de juicio sintético a priori.

1. El MP como condición necesaria del PIM

El matemático francés Henri Poincaré en su artículo titulado *Naturaleza del razonamiento matemático*[53], preocupado por establecer la validez de lo que él llamaba demostraciones por recurrencia, señalaba que el PIM no era otra cosa que una proposición que condensa una infinidad de inferencias del tipo siguiente:

El teorema es cierto para el número 1

Luego, si es cierto para 1, es cierto para 2

Entonces es cierto para 2

Luego, si es cierto para 2, es cierto para 3

Entonces es cierto para 3,

y así sucesivamente...

Aunque Poincaré tuvo una intuición certera de la primera tesis que sostenemos en este artículo, no se interesó en el mecanismo lógico que la justifica y cometió el error de denominar al razonamiento anterior una cadena de silogismos hipotéticos. En efecto, como es claro, se trata más bien de una cadena de aplicaciones de lo que los lógicos llaman universalmente regla del MP. El silogismo hipotético ordinario, que no es otra cosa que la expresión de la propiedad de transitividad para el condicional, sólo nos permite establecer que el primer antecedente implica el último consecuente de la cadena de condicionales pero no nos permite afirmar categóricamente que el teorema se cumple para los números 2, 3,... por separado, a menos que presupongamos la validez de alguna regla que autorice la separación del consecuente.

En el planteamiento descrito parece que de alguna manera se está suponiendo la posibilidad de definir el cuantificador universal en los siguientes términos:

Df. 1. $(\forall x)\, P(x) \equiv Pa_1 \wedge Pa_2 \wedge Pa_3 \wedge \ldots \wedge Pa_n$

53 Publicado en la selección de ensayos de Poincaré *Filosofía de la ciencia*, México D.F., UNAM, 1964, p. 217.

En la definición Df.1 debe asumirse, de conformidad con la idea de Poincaré, que el componente derecho de la equivalencia es un conjunto infinito de elementos Pa_i ($i \geq 2$) cada uno de ellos obtenido por MP. Pero para que la definición sea correcta no es suficiente que cada proposición Pa_i sea verdadera sino que tal hipotética conjunción de infinitos componentes también lo sea. Sin embargo, no es posible definir, al menos en términos de la lógica proposicional, una función de verdad conjuntiva constituida por infinitos componentes debido a que no sería posible determinar en cada caso el valor de la pretendida conjunción infinitaria. No hay pues, en el sentido propuesto por la tesis de Poincaré, conjunciones infinitas de valor de verdad calculable aunque, obviamente, se admite infinitas conjunciones finitas.

El matemático francés era consciente de la limitación antes señalada, pero en el ensayo citado no proporciona mayor detalle al respecto. La solución que propone es que la equivalencia establecida por Df. 1 es posible en el espíritu por una operación de síntesis muy especial que se impone a nuestra razón. De esta manera considera al PIM un ejemplo típico de juicio sintético *a priori* que expresa la naturaleza intrínseca del razonamiento matemático de manera especialmente privilegiada[54].

No es necesario identificarnos con el apriorismo de H. Poincaré para reconocer el mérito que tiene por haber intuido en su tiempo una relación estrecha entre una regla tradicionalmente lógica como el MP y un principio tradicionalmente matemático como el PIM. Consideramos que su planteamiento es reelaborable y sostenible si se lo interpreta en el sentido que defendemos en nuestro trabajo, éste es que la validez del MP está presupuesta como condición necesaria en la construcción de pruebas por inducción matemática. Nuestra argumentación es como sigue.

Si formalizamos el PIM de la manera usual, entonces tenemos:

$$«P(1) \wedge (\forall x)\,(P(x) \rightarrow P(\forall x + 1)) \rightarrow (y)P(y)»$$

Claramente, en este caso para justificar la validez de la postulación del PIM ningún matemático incluiría como argumento el hecho de que un condicional con el antecedente falso es siempre verdadero como ocurre con algunas demostraciones del tipo de las usadas, por ejemplo, para probar que el conjunto vacío está contenido en todo conjunto, porque de hacerlo eliminaría la posibilidad de obtener una conjunción verdadera al asumir que Pa_i es un componente falso. Por tanto, toda demostración matemática que aplica el PIM asume la validez de la fórmula anterior y luego procede, de acuerdo a la naturaleza del caso particular, a probar que las condiciones $P(1)$ y $(\forall x)\,(P(x) \rightarrow P(x+1))$ son verdaderas. A continuación deriva la validez del teorema para todos los números naturales mediante la denominada generalización inductiva que consiste en la afirmación de la fórmula $(\forall y)\,P(y)$, lo cual sólo es posible legítimamente si se supone como dada una aplicación de la regla de *Modus Ponens*. Como paso intermedio, dentro de la demostración de la verdad de la condición $(\forall x)\,(P(x) \rightarrow P(x+1))$, es necesaria una aplicación de la regla de generalización universal para que el antecedente de la fórmula que expresa el PIM pueda coincidir exactamente con esta condición que los matemáticos usualmente la dejan indicada sin cuantificarla. Lo que hace posible la introducción del cuantificador universal es el empleo implícito de la regla

54 Es importante señalar que la concepción de Poincaré del PIM como juicio sintético *a priori* sugiere que es dudoso el convencionalismo radical que usualmente se le atribuye.

de la prueba condicional o del teorema de la deducción según sea el caso. En la práctica matemática usual no se hace explícito el proceso lógico antes descrito, pero en razón de la naturaleza de nuestra indagación, este análisis ha sido necesario para contar con las bases que hagan posible la reconstrucción de la estructura lógica de una prueba matemática por inducción de tal manera que queden explícitos sus presupuestos deductivos.

En armonía con lo anterior, consideramos que el siguiente es el esquema lógico de una prueba matemática basada en el PIM.

1. $P(1) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow P(x+1)) \rightarrow (\forall y)P(y)$

2. $P(1)$

3. $(\forall x)(P(x) \rightarrow P(x+1))$

4. $P(1) \wedge (\forall x)(P(x) \rightarrow P(x+1))$

5. $(\forall y)P(y)$

Como puede apreciarse en el esquema de prueba anterior, la justificación de 5. sólo es posible por aplicación de alguna regla que autorice la separación del consecuente de la fórmula de la línea 1. de su antecedente, y tal regla no puede ser otra que el MP aplicado a las líneas 1. y 4. De otra parte cualquier otra regla que se invocara sería equivalente al MP debido a que cumpliría la misma función y, consecuentemente, no sería propiamente otra regla. Asimismo, si prescindiéramos de las líneas 1. y 4. y del MP, como usualmente hacen los matemáticos, entonces no habría ninguna razón lógica explícita que nos autorice a derivar la línea 5. desde las líneas 2. y 3., que por sí mismas son absolutamente insuficientes para justificarla.

La derivación de 5. desde el punto de vista formal, parecería gratuita. Y afirmamos que la derivación de 5. solamente desde 2. y 3. sería gratuita por el hecho de que existen estructuras matemáticas no inductivas que nos permiten construir interpretaciones que convierten en verdaderas a las premisas 2. y 3. y en falsa a la conclusión 5. Así, por ejemplo, para la interpretación que tiene como dominio el conjunto de los polinomios que tiene coeficiente principal no negativo y para los cuales se define las usuales operaciones de adición y multiplicación, se demuestra que en ella no es válido el PIM debido a que previamente se prueba que en esta estructura no es válida la propiedad de la división euclidiana (Demostración propuesta por Mendelson, 1964, p.11). Por tanto, en este caso ocurre que 2. y 3. son proposiciones verdaderas y 5. falsa, lo que impide que se pueda hablar de inferencia lógicamente válida que asegure a partir de la verdad de las premisas la verdad de la conclusión. Esto apoya nuestro argumento que sostiene que si se prescindiera de las líneas 1. y 4., entonces la conclusión 5. sería gratuita en el sentido de que no se seguiría con necesidad lógica[55]. Empero si se toma el esquema de prueba completo, esto es, incluyendo desde la línea 1. hasta la línea 5., entonces ocurre que la interpretación anterior ya no convierte en verdadera a la conjunción de las premisas (constituida por las cuatro primeras líneas) y en falsa a la conclusión 5., pues al

55 Anotamos que el ejemplo de la estructura matemática no inductiva basta para probar que el PIM no es una proposición lógicamente verdadera y, consecuentemente, carece de la universalidad necesaria que usualmente se reclama para los juicios sintéticos **a priori**, lo cual puede entenderse como una limitación para las pretensiones de Poincaré pero al mismo tiempo para las posiciones logicistas derivadas de Russell.

ser falsa para tal interpretación la premisa 1. (el PIM), la conjunción de las premisas ya no puede ser verdadera.

De otra parte, podemos probar que para el esquema de demostración completo se cumple necesariamente que toda interpretación que convierte en verdadera a la conjunción de sus premisas también convierte en verdadera a la conclusión, esto es, para nuestro esquema se cumple la usual definición de consecuencia lógica de Tarski. La condición anterior en efecto se cumple porque es evidente que si una interpretación convierte en verdadera a la conjunción de premisas, convierte también necesariamente en verdaderas a 1. y a 4. y, por consiguiente, otorga también el valor verdadero a la conclusión 5., pues esta no puede ser falsa a menos que concedamos que 1. es falsa, en cuyo caso estaríamos incurriendo en contradicción. Por tanto, el esquema de demostración propuesto, tomado en su conjunto, sí garantiza la construcción de una inferencia lógicamente válida y el establecimiento de una regla de deducción lógicamente conclusiva para legitimar la separación del consecuente de 1. de su respectivo antecedente. Por consiguiente, o bien se asume la validez del esquema de prueba propuesto y con ello que el MP es una regla de inferencia de toda prueba por inducción matemática, o bien se sostiene lo contrario y se concede que la conclusión de la línea 5. es gratuita con lo que se estaría aceptando que realmente no hay pruebas inductivas y con ello un absurdo desde e punto de vista matemático y una limitación lógica que no existe[56].

Este resultado nos permite sostener que el MP es condición necesaria para la aplicación del PIM y que éste, a su vez, es condición suficiente para asegurar que el MP ha sido utilizado. Asimismo, en la medida que las condiciones necesarias de una formulación no son otra cosa que los presupuestos para su validez, vale decir, su lógica subyacente, luego podemos aseverar que la llamada regla de separación forma parte de la lógica subyacente en toda demostración por inducción matemática.

2. Posibilidad de axiomatizar la aritmética sin MP

Pueden hacerse dos observaciones al planteamiento antes desarrollado. La primera sería el señalar que es una cuestión de hecho que se han construido sistemas lógicos satisfactorios, como el M.J. Nicod, que utilizan una regla de inferencia distinta a la aquí postulada y, consecuentemente, podría sostenerse que si se usara dicho sistema para la formalización de la aritmética, no sería necesario presuponer al MP. La segunda podría ser tomada de una de las consecuencias más interesantes del llamado teorema fundamental del Herbrand que implica que el MP es omitible en la teoría de la cuantificación, la que puede construirse utilizando las denominadas «reglas del pasaje», las dos reglas de generalización y la regla generalizada de simplificación. La corrección de estos resultados, con sus respectivas limitaciones, ha sido verificada y comentada, entre otros, por Burton Dreben en sus notas adjuntas a la publicación de los trabajos de Herbrand contenidos en *From Frege to Gödel* de van Heijenoort.

Nos dedicaremos ahora a observar con detalle la primera observación. Nicod[57] construyó un sistema lógico reduciendo los usuales operadores de la lógica proposicional a solamente el operador de incompatibilidad con el cual es posible construir un sistema funcionalmente

56 En el sistema de Peano contenido en *Los principios de la aritmética presentados por un nuevo método*, el MP no aparece como regla de inferencia lo que da lugar a que las pruebas inductivas, desde el punto de vista estrictamente formal sean gratuitas. Pero esta insuficiencia no debe entenderse en el sentido de que Peano sostuvo que su axiomatización no necesitaba del MP sino que no lo hizo explícito, lo cual fue una deficiencia formal.

57 El sistema de Nicod puede verse en Copi, *Symbolic Logic*, 3ª. Ed., p. 208.

completo debido a que permite expresar cualquiera de los 16 operadores binarios posibles. Dadas las restricciones del lenguaje de Nicod, no es posible formular en su sistema directamente del MP sino su equivalente. Sin embargo la regla de inferencia usada por Nicod no es exactamente equivalente a la forma canónica del MP, pues su esquema es el siguiente:

«Desde P y P. / . R / Q se infiere Q»

Realizando conocidas transformaciones, encontramos que el equivalente en notación usual de la regla de Nicod es:

«Desde P y $P \rightarrow (R \wedge Q)$ se deduce Q».

Como puede verse fácilmente, el MP es un caso particular de este esquema cuando se sustituye R por Q[58]. Pero, además, se puede constatar sin dificultad que la regla de Nicod equivale a la aplicación sucesiva del MP y de la regla de simplificación, lo que prueba que la tradicional regla de separación es condición necesaria para la deducción en el sistema de Nicod.

Para examinar la posible objeción basada en una de las consecuencias del llamado teorema fundamental de Herbrand, contenido en su trabajo *Investigations in Proof Theory* (1930), es necesario traer a colación algunas características de su sistema, que es usualmente denominado con la abreviatura Q_H. En esta exposición prescindiremos de detalles técnicos muy elaborados y nos limitaremos a proporcionar, informalmente pero con precisión, aquello que es necesario para entender el sentido del argumento.

(i) Las llamadas «reglas del pasaje», que pueden denotarse por el par J_h; K_h, para h = 1, ..., 6, son:

1. $\sim (\forall x)\, ø\,(x)\ ;\ (\exists x) \sim ø\,(x)$
2. $\sim (\exists x)\, ø\,(x)\ ;\ (\forall x) \sim ø\,(x)$
3. $(\forall x)\, ø\,(x) \vee Z\ ;\ (\forall x)\,(ø\,(x) \vee Z)$
4. $Z \vee (\forall x)\, ø\,(x)\ ;\ (\forall x)\,(Z \vee ø\,(x))$
5. $(\exists x)\, ø\,(x) \vee Z\ ;\ (\exists x)\,(ø\,(x) \vee Z)$
6. $Z \vee (\exists x)\, ø\,(x)\ ;\ (\exists x)\,(Z \vee ø\,(x))$

En estos pares de fórmulas se asume que la variable «x» no es libre en Z. Conmutando las fórmulas componentes obtenemos el par K_h; J_h, con lo que totalizamos 12 «reglas del pasaje» para el sistema del Herbrand. Asimismo es un resultado conocido, expresado en el sistema Q_H por la proposición 3.101, que para cualquier proposición P se puede obtener otra equivalente P' por aplicación de las reglas anteriores. La fórmula P' se denomina usualmente forma normal prenex y es de la forma:

$$(Q_1 y_1) \ldots (Q_n y_n)\, ø\,(y_1 \ldots\ldots y_n)$$

58 Este resultado fue señalado por L. Post en *Introduction to a general theory of elementary propositions*, cifra 7.

en la que cada $(Q_i y_i)$ es un cuantificador universal o existencial que liga a alguna de las variables y_i, las cuales son todas distintas entre sí. Cuando todos los cuantificadores existenciales anteceden a todos los cuantificadores universales, la fórmula es conocida como la Forma Normal de Skolem.

Una fórmula P es una *identidad normal* según Herbrand si existe alguna forma normal prenex P' de ella, desde la cual es derivable por medios conocidos una identidad del tipo

$$\emptyset (x) \vee \sim \emptyset (x)$$

que Herbrand denomina identidad de primera clase.

Una proposición P tiene la propiedad A si es posible derivar desde ella, mediante un proceso de sustitución de esquemas de cuantificadores[59], una proposición P' que es una identidad normal.

Si una proposición P tiene la propiedad A, entonces existe en el sistema Q_H una prueba para P[60]. En breve, si P tiene la propiedad A, entonces A es demostrable o deducible en Q_H. Recíprocamente, si P es demostrable en el sistema Q_H, entonces P tiene la propiedad A.

Herbrand establece como resultado de su teorema fundamental[61] que la demostración en Q_H de una proposición P, que satisface la propiedad A, precisa única y exclusivamente de la aplicación de las «reglas del pasaje», de las reglas de generalización y de la regla generalizada de simplificación.

Conocida la forma lógica de las «reglas del pasaje» y de las reglas de generalización universal y existencial, es fácil constatar que ninguna de ellas legitima la operación de separación. Esto es, no nos permiten afirmar a partir de una proposición dada la verdad de una de sus proposiciones componentes, por lo que no hay razón para que alguna de ellas presuponga el MP. Por tanto, de las reglas necesarias para construir una demostración en Q_H, solamente la regla generalizada de simplificación podría presuponer la validez del MP, pero, como veremos a continuación al formular su enunciado, si bien esta regla permite la separación de uno de sus componentes, no presupone la validez del MP.

Regla generalizada de simplificación Df. «Si en una proposición verdadera (demostrable en Q_H) la subproposición P v P es reemplazada por P, entonces obtenemos otra proposición verdadera»[62].

La validez de esta regla derivada en Q_H supone la demostrabilidad de la fórmula $P \vee P \equiv P$ dentro de dicho sistema. En efecto, como Burton Dreben lo ha señalado, en detalle, en su nota B a la edición consultada, este teorema se establece demostrando en Q_H «$P \vee P \rightarrow P$» y «$P \rightarrow P \vee P$» sin necesidad de recurrir a la «regla de implicación»[63]. Por tanto, la prueba en

59 Un «esquema de cuantificadores» y un «tipo» son nociones técnicas en el texto de Herbrand que sería laborioso e innecesario considerar aquí en detalle. Asimismo no existe un algoritmo para decidir, en general, si cualquier proposición P tiene la propiedad A.

60 Este es un resultado de Herbrand que establece que una teoría de primer orden es semánticamente completa, teorema cuya prueba se atribuye usualmente solo a Gödel (1930). Como lo señala Wang en *Eigthy years of foundational studies*, Herbrand no concedió especial importancia a su demostración debido a que la noción de compleción no era significativa para él debido a que aceptaba solamente métodos finitísticos.

61 Vid. van Heijenoort, *From Frege to Gödel*, Cambridge, Harvard University Press, 1967, p. 558.

62 Vid. ídem.

63 Detalles de esta demostración pueden ser consultados en las notas A, B y D hechas por Berton Dreben a los textos de Herbrand contenidos en *From Frege to Gödel*.

Q_H de una proposición P, que tiene la propiedad A, puede realizarse, sin ninguna dificultad, con independencia del MP usando la regla generalizada de simplificación para garantizar el rigor de la operación de separación. Este resultado se sigue claramente de la demostración antes descrita y es considerado por Herbrand de la mayor importancia. Dreben por su parte opina que es el resultado básico de la tesis sostenida en *Investigations in proof theory*.

Sin embargo, la demostración reseñada no tiene la fuerza suficiente como para sustentar una afirmación en el sentido de que la aritmética sea formalizable sólo con los medios expresivos de Q_H de tal manera que no sea necesaria la «regla de implicación (MP)». Esta posibilidad que debilitaría significativamente nuestro planteamiento, realmente no existe, en la medida que el mismo Herbrand anotó como una limitación de las consecuencias de su teorema fundamental que el MP no es omitible en una teoría matemática que contenga hipótesis. Él no entró en mayores detalles para fundamentar la exactitud de este último aserto, pero la argumentación que dimos para probar que la mencionada regla es condición necesaria para el uso del PIM, es suficiente para avalar la aserción herbrantiana con la única condición de que este principio sea una hipótesis. Adicionalmente, la demostración del Teorema de la Deducción (con más propiedad, metateorema), de uso extendido en las axiomatizaciones de la Lógica de primer orden, atribuida a Herbrand por su trabajo *Recherches sur la Théorie de la demonstration* (1930), también requiere el uso del MP.

Ciertamente no es necesaria mayor argumentación para probar que efectivamente el PIM es una hipótesis. Al respecto basta señalar que es una proposición extralógica necesaria para derivar específicamente las proposiciones verdaderas de la aritmética y por ello hay que añadirla en las formalizaciones de ella a los enunciados estrictamente lógicos, como lo hace Herbrand tanto en *Investigations in proof theory* como en su trabajo *On the consistency of arithmetic* (1931)[64].

3. Extensión al Principio de Inducción Fuerte

Como una limitación adjetiva de la argumentación precedente podría, tal vez, observarse que nuestro planteamiento carece de generalidad porque no afecta a la versión fuerte del PIM. Sin embargo, sin excluir otras posibles respuestas a esta objeción, nos limitaremos a puntualizar que nuestro planteamiento es válido para la denominada versión fuerte del principio analizado, en la medida que ésta puede ser demostrada, como es conocido en los medios especializados, a partir de la enunciación débil. Al respecto pueden encontrarse pruebas alternativas con relativa facilidad, pero la que nosotros brindaremos a continuación tiene la ventaja, para nuestros fines, de haber sido construida dentro de una teoría formalizada de números en la que se hace explícita la lógica subyacente.

Antes de proseguir, también es oportuno advertir que hemos optado por una formalización del PIM que podría no ser aceptada por ciertas posiciones intuicionistas debido a que lo expresamos a través de una fórmula lógica que contiene variables aparentes. Esta formalización tiene importantes diferencias teóricas con la presentada, por ejemplo, por Herbrand en su demostración de la consistencia de la aritmética, la cual no contiene variables aparentes. De otra parte, anotamos que es generalmente a la versión fuerte a la que se denomina Principio de Inducción Completa.

64 Contenido en *From Frege to Gödel.*, pp. 618-628.

La fórmula que demostraremos como teorema es la siguiente:

$(\forall x)\ ((\forall z)\ (z < x \rightarrow A(z)) \rightarrow A(x)) \rightarrow (\forall x)\ A(x)$

En la demostración se utilizará el teorema de la deducción, y se tomarán como premisas algunos teoremas de la *Teoría Formal de Números* de Mendelson[65] los que listamos a continuación. También se utilizarán como reglas de inferencia algunas tautologías, que por ser muy conocidas no hace falta que las especifiquemos previamente, y las reglas de introducción y eliminación de cuantificadores.

T1. $\sim (t < 0)$

T2. $A(0) \wedge A(1) \wedge \ldots \wedge A(k) \equiv (\forall x)\ (x \leqslant k \rightarrow A(x))$

T3. $t \leqslant r \equiv t < r'$ (En adelante para designar al sucesivo de t usaremos la expresión t')

T4. $x = y \rightarrow (A(x,x) \rightarrow A(x,y))$

D2. $z \leqslant x' \equiv z < x' \vee z = x'$

T5. $x \leqslant x$

La demostración es como sigue:

I. Supongamos una propiedad tal como **B**(x) que sea en detalle de la forma $(\forall z)$ $(z \leqslant x \rightarrow A(z))$. Probaremos primero en esta primera parte que 0 tiene la propiedad **B**, esto es **B**(0). En la segunda parte probaremos que es verdad **B**(x') siempre que se suponga que se cumple la hipótesis inductiva **B**(x).

1.	$(\forall x)\ (\ (\forall z)\ (z < x \rightarrow A(z)\ ) \rightarrow A(x)\ )$	Premisa para Prueba Condicional.
2.	$(z)\ (z < 0 \rightarrow A(z)\ ) \rightarrow A(0)$	EU. en 1.
3.	$\sim (z < 0)$	T1.
4.	$(\forall z < 0 \rightarrow A(z)\ )$	Tau $\sim p \rightarrow (p \rightarrow q)$ y MP.con 3.
5.	$(\forall z)\ (z < 0 \rightarrow A(z)\ )$	3, GU.
6.	$A(0)$	2 y 5 MP.
7.	$(\forall z)\ (z \leqslant 0 \rightarrow A(z)\ )$	6. T2. (para k = 0)
8.	**B**(0)	7 es **B**(0)
9.	$(\forall x)\ (\ (\forall z)\ (z < x \rightarrow A(z)\ ) \rightarrow A(x)\ ) \vdash$ **B**(0);	Hay una prueba de que **B**(x) se cumple para x = 0)

65 Vid. E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. Toronto, D. Van Nostrand Company, Inc., 1966, cap. III.

II. 1.	$(\forall x)\,(\,(z)\,(z < x \rightarrow A(z)\,) \rightarrow A(x)\,)$	Premisa.
2.	$(\forall z)\,(z \leqslant x \rightarrow A(z)\,)$	Hipótesis inductiva B(x)
3.	$(\forall z)\,(z < x' \rightarrow A(z)\,)$	2, T3.
4.	$(\forall z)\,(z < x' \rightarrow A(z)\,) \rightarrow A(x')$	1, EU.
5.	$A(x')$	3,4 MP.
6.	$z \leqslant x' \rightarrow z < x' \vee z = x'$	Df. 2.
7.	$z < x' \rightarrow A(z)$	3, EU
8.	$z = x' \rightarrow (A(x') \rightarrow A(z)\,)$	T4. simetría
9.	$A(x') \rightarrow (z = x' \rightarrow A(z)\,)$	En 8 Importación, Conmut. y Export.
10.	$z = x' \rightarrow A(z)$	5,9 MP.
11.	$z \leqslant x' \rightarrow A(z)$	6,7,10, por tautología $((p \rightarrow (q \vee r\,))$ $\wedge\,(q \rightarrow z)\,\wedge\,(r \rightarrow z)) \rightarrow (p \rightarrow z)$
12.	$(\forall z)\,(z \leqslant x' \rightarrow A(z)\,)$	Gen. en 11.
13.	$B(x')$	12 es $B(x')$

14. $(\forall x)\,(\,(\forall z)\,(z < x \rightarrow A(z)\,) \rightarrow A(x)\,) \vdash (\forall x)\,(B(x) \rightarrow B(x')\,)$ Este paso se justifica por aplicación de la Prueba Condicional o del Teorema de la Deducción, según se proceda dentro de un Sistema de Deducción Natural del tipo del de Gentzen o de un sistema axiomático.

III. Desde lo establecido en I y II y el PIM en su versión débil obtenemos $P \vdash (\forall x)\,\mathbf{B}(x)$. Vale decir, hemos obtenido una prueba a partir de la premisa P (P designa abreviadamente la primera línea de I y la primera línea de II) que nos permite generalizar la propiedad **B**(x) a todo número natural. Ahora, por aplicación reiterada de la regla de Ejemplificación Universal obtenemos $P \vdash x \leqslant x \rightarrow A(x)$, y por T5. y MP. tenemos $P \vdash A(x)$, y, aplicando la regla de Generalización Universal y nuevamente el Teorema de la Deducción, $\vdash P \rightarrow (x)\,A(x)$ que, detallando P, es $\vdash (\forall x)\,(\,(\forall z)\,(z < x\;\;A(z)\,) \rightarrow A(x)\,) \rightarrow (\forall x)\,A(x)$, que es lo que queríamos demostrar.

Antes de terminar este artículo hacemos la salvedad de que aunque nuestra formalización del Principio de Inducción Matemática no es necesariamente compatible con el intuicionismo, sin embargo, nuestra tesis sobre el estatuto de condición necesaria atribuido a la «regla de implicación», es compatible con la llamada lógica intuicionista de Gentzen[66] que la incluye como una de sus reglas primitivas de inferencia. De igual manera, Andrei

66 Nos referimos al sistema conocido como NJ, aunque nuestra tesis se cumple también para NK.

Nikolaevich Kolmogorov en su artículo *On the principle of excluded middle* (1925) desarrolla una lógica intuicionista, aprovechando los resultados de Brouwer, en términos algo más exigentes que los que posteriormente utilizara Heyting. Kolmogorov prueba que el sistema de Hilbert (1922) para la lógica proposicional es reducible a su sistema B que permite desarrollar la matemática sin la ayuda del principio del tercio excluido. Este sistema intuicionista también es compatible con nuestro planteamiento en la medida que utiliza el MP como regla de separación.

4. El PIM no es un juicio sintético *a priori*

Con los resultados producidos por la investigación en lógica durante los últimos setenta años no es difícil proporcionar un argumento convincente para probar que Poincaré cometió un error, comprensible en una época en la que no existía todavía la Teoría de Modelos, al sostener que el PIM era un ejemplo representativo de lo que Kant denominó Juicios sintéticos *a priori*. Asimismo, este notable matemático conjeturó que el carácter sintético de este principio es el mecanismo que explicaba el crecimiento de la matemática, proceso que resultaba incomprensible si nos reducimos, como en el álgebra, al uso de igualdades, las mismas que, usando una metáfora, nos dicen de una manera complicada que A = A, identidad perfectamente compatible con los juicios analíticos kantianos caracterizados, por su autor, como afirmaciones puramente explicativas o aclaratorias que carecen de capacidad para incrementar el conocimiento.

Lo más atractivo para un matemático de esta caracterización del PIM fue, seguramente, que según Kant los juicios sintéticos *a priori* eran necesaria y universalmente verdaderos, esto es, apodícticos. La cita que transcribimos a continuación es ilustrativa del punto de vista del filósofo de Könisberg:

«Necesidad y universalidad estricta son, pues, criterios seguros de conocimiento a priori y se hallan inseparablemente ligados entre sí. (...) Es fácil mostrar que existen realmente en el conocimiento humano semejantes juicios necesarios y estrictamente universales, es decir, juicios puros a priori. Si queremos un ejemplo de las ciencias, sólo necesitamos fijarnos en todas las proposiciones de las matemáticas». (Kant; *Crítica de la razón pura*, Editorial Alfaguara, Madrid 1998. Traductor Ribas, Pedro. p.44. Introducción).

El carácter de enunciado incondicionalmente verdadero, universal y no tautológico (analítico) que derivó Poincaré del pensamiento kantiano resultaba un hallazgo plausible para quien fue un matemático que no avaló las pretensiones del proyecto logicista de Russell y Whitehead. Sin embargo, como es conocido en los medios especializados, las demostraciones de la independencia de los axiomas de Peano han mostrado que el PIM no es universal ni necesariamente verdadero en tanto que es posible construir interpretaciones que convierten en verdadero a su antecedente y en falso a su consecuente.

En efecto, hay estructuras no inductivas que satisfacen los otros axiomas de Peano, aunque esta última condición no es indispensable para establecer que el PIM no es verdadero bajo diversas interpretaciones posibles. Una de ellas es la que describimos en la parte 1. de este artículo, sin incluir detalles técnicos debido a que no añaden información indispensable para comprender el sentido de nuestra tesis y son ejercicios de aplicación en los cursos de

lógica matemática desde hace algunas décadas. Ciertamente, la casi totalidad de los ejemplos de juicio sintéticos *a priori* que Kant proporcionó en la *Crítica de la razón pura* están sujetos a objeciones muy semejantes a la que hemos formulado contra el PIM para desvirtuar una tesis epistemológica defendida por un físico – matemático genial que todavía despierta entusiasmo en candorosos filósofos de la matemática que todavía cuentan con auditorio.

Fuentes de los resultados en Lógica–Matemática citados

Herbrand, Jacques — (1967) *Investigations in proof theory: The properties of true propositions.* (Publicado en la antología, anotada y comentada, *From Frege to Gödel,* editada por van Heijenoort, Jean. Ediciones de Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts). Esta antología cubre los trabajos más importantes en Lógica publicados entre 1879 y 1931. Contiene 46 trabajos escritos originalmente en 7 lenguas y solamente 5 de ellos no han sido incluidos en su integridad. Colaboran con notas y comentarios Quine, Dreben y Hao Wan. Este artículo de Herbrand es el capítulo V de su tesis doctoral *On the consistency of arithmetic* defendida en la Sorbona en 1930.

Kolgomorov, Andrei N. — (1967) *On the principle of excluded middle* (contenido en *From Frege to Gödel*). El artículo se publicó en ruso en 1925 y ha sido traducido por van Heijenoort con el permiso del autor.

Mendelson, Elliott — (1966) *Introduction to Mathematical Logic.* (D. Van Nostrand Company, Inc. Toronto).

Peano, Giuseppe — (1967) *The principles of arithmetic, presented by a new method.* (publicado en *From Frege to Gödel.* Traducción de van Heijenoort). Esta versión consiste del prefacio y de la parte 1 del libro original. Las partes 2, 4,5 y 6 han sido reproducidas sólo parcialmente, pues se ha omitido el desarrollo de los teoremas.

Poincaré, Henry — (1964) *Filosofía de la Ciencia.* (UNAM, México). Es una selección de textos debida a Elí de Gortari. *Últimos pensamientos* (Espasa Calpe, Bs. As., 1946).

Wang, Hao — (1970) *Logic, Computers and Sets.* (Chelsea Publishing Company, New York). Ver el capítulo IV. *The axiomatization of arithmetic.*

III. TEORÍA DE LA VERDAD

La teoría probabilística del significado[67]

I. Extensión de la teoría alética del significado a proposiciones de observación del lenguaje ordinario

Habiendo mostrado que las proposiciones de observación del lenguaje ordinario se inscriben en la teoría fisicalista de la verdad, nosotros, por añadidura, trataremos de extender la teoría alética del significado a estas clases de proposiciones. Esta extensión demanda algún análisis preliminar referente a los conceptos que aparecen en la teoría del significado de este modo desarrollada.

Comenzamos con el primer principio. Él establece que la significación está ligada a la verificabilidad. Dijimos antes que daríamos por asumida la posibilidad de verificación y continuamos manteniendo esta presuposición en la presente sección. Pero esto solo significa que pondremos entre paréntesis las objeciones contra el término «verificación»; nosotros debemos ahora, sin embargo, analizar el término *«posibilidad»*.

Antes de entrar en este análisis, anotaremos que la posibilidad que investigamos no se refiere a la postulación en cuestión sino solamente al método de su verificación. La postulación en sí misma puede ser imposible; luego la verificación proporcionará como resultado que la proposición es falsa. Esto es permisible debido a que verificación tiene para nosotros una significación neutral: significa determinación como verdadero o falso. Así la proposición, *«Hércules es capaz de llevar el globo terrestre sobre sus hombros»*, es verificable si hay algún Hércules ante nosotros expresando tales pretensiones; aunque estamos seguros de que la realización de su pretensión no es posible, la verificación es posible y mostrará que tal proposición es falsa.

Nosotros debemos investigar ahora qué es lo significado por posibilidad de la verificación. El término *«posibilidad»* es ambiguo porque hay diferentes conceptos de posibilidad. Debemos, por tanto, añadir una definición de posibilidad.[68]

Primero, existe el concepto de *posibilidad técnica*. Este concierne a hechos, la realización de los cuales descansa en el poder de individuos o de grupos de hombres. Es técnicamente posible construir un puente a través del Hudson; construir un puente a través del canal de Calais a Dover es, tal vez, todavía técnicamente imposible; y es seguramente técnicamente imposible construir un puente sobre el Atlántico.

67 Reichenbach, Hans (1938) *Experience and Prediction*. Chicago, The University of Chicago Press, pp 37-57. Traducción: Luis Piscoya Hermoza.
68 Esto ha sido recientemente enfatizado por Carnap «Verificabilidad y Significado» *Philosophy of Science III* (1936), 420.

Segundo, existe el concepto de *posibilidad física*. Esto demanda solamente que los hechos en cuestión sean ajustables a las leyes físicas, sin considerar el poder humano. La construcción de un puente a través del Atlántico es físicamente posible. Una visita a la Luna es físicamente posible también[69]. Pero construir una máquina de movimiento perpetuo que constantemente proporcione energía es físicamente imposible, y visitar el sol sería físicamente imposible también, porque un hombre se quemaría junto con su nave espacial antes de alcanzar la superficie solar.

Tercero, existe el concepto de *posibilidad lógica*. Este demanda todavía menos; demanda solamente que el hecho pueda ser imaginado o, estrictamente hablando, que no entrañe contradicción. El movimiento perpetuo y la visita al sol son lógicamente posibles. Sería lógicamente imposible, sin embargo, construir un círculo cuadrado o encontrar un autocarril sin rieles. Este tercer concepto de *posibilidad* es el más amplio; excluye solamente contradicciones.

Apliquemos ahora estos conceptos a la cuestión de la verificabilidad. Debe tenerse en mente que estos tres conceptos de posibilidad van a ser aplicados al método de verificación y no al hecho descrito por la proposición.

El concepto de *posibilidad técnica* no es usualmente aludido por nosotros cuando hablamos de la posibilidad de verificación. Al contrario, se enfatiza que el Postulado de Verificabilidad deja una mayor libertad a las proposiciones que lo que la posibilidad técnica permitiría. El enunciado *«La medida, desde el puente a través del Atlántico, de la diferencia de las mareas sería de aproximadamente diez metros»* es considerado como verificable porque tal puente es físicamente posible; desde este puente nosotros tendríamos solamente que tirar una línea de plomada sobre la superficie del agua y podríamos medir por este medio el nivel del agua, lo cual no se puede hacer desde los barcos porque estos deben seguir las subidas y bajadas del nivel del mar. Nosotros, por tanto, rechazaremos la posibilidad técnica como criterio de verificabilidad.

El concepto de *posibilidad física* proporciona un marco suficientemente amplio para enunciados de la clase dada; pero hay otros enunciados excluidos por él. A estos pertenecen los enunciados referentes a un muy remoto futuro. Que habrá dentro de doscientos años un mundo similar al de hoy día no puede ser verificado por mí; así esta sería una proposición sin significado si aceptamos la posibilidad física para la definición de verificabilidad. Esta dificultad puede ser superada con un pequeño cambio en la definición de «verificabilidad»; nosotros podríamos contentarnos con la verificación realizada por cualquier ser humano y renunciar a estar jugando un rol personal en el proceso. Pero hay todavía otras proposiciones que serían no significativas. Tal sería una proposición referente al mundo después de la muerte del último representante de la especie humana. O una proposición referente al interior del sol; que hay cuarenta millones de grados de calor en el centro del sol no puede ser verificado porque es físicamente imposible introducir un instrumento de medida en la masa solar. A esta categoría también pertenecen las proposiciones acerca de la estructura atómica de la materia. Que los electrones giran alrededor del núcleo del átomo, que ellos tienen un *spin*, etc. es físicamente inverificable en el estricto sentido del término. Si llamamos *significado físico* del concepto de significado al definido por la demanda de posibilidad física de verificación, luego las proposiciones dadas no tienen significado físico.

69 Esta afirmación debe comprenderse considerando que el texto original es de 1938. (Nota del traductor)

El concepto de *posibilidad lógica* es el más amplio de los tres; aplicándolo a la definición de verificabilidad obtenemos el concepto de *significado lógico*. Todos los ejemplos dados antes tienen significado lógico. Un enunciado referente al mundo dentro de doscientos años es significativo porque no es lógicamente imposible que yo aún viva entonces, por citar un ejemplo; suponer esto no sería una contradicción. Y hablar del mundo después de mi muerte o después de la muerte del último hombre es significativo porque no es lógicamente imposible que nosotros tengamos impresiones aún después de nuestra muerte. Yo no quiero decir que este concepto de significado presuponga la vida eterna; hace uso solamente del hecho de que la vida eterna no es una contradicción y se abstiene, prudentemente, de cualquier presuposición de que haya alguna opción de que sea real. Similares reflexiones son válidas para el ejemplo de las mediciones en el interior del sol. Puedo imaginarme un termómetro de considerable longitud puesto dentro del centro del sol y la columna de mercurio alcanzando un grado marcado por la figura de un cuatro con siete ceros. Aunque no pienso que algún físico intentará alguna vez construir tal termómetro, no hay contradicción lógica en la concepción. Contradice las leyes de la física, seguro; pero las leyes de la física son, al fin, cuestiones de hecho y no necesidades lógicas. Así para los enunciados concernientes a la estructura del átomo puede imaginarme a mí mismo achicándome a tal grado que los electrones parezcan tener el tamaño de una pelota de tenis. Si alguien lanza una objeción a esto, sería capaz de responderle que tal presuposición no entraña contradicción alguna.

Si hacemos ahora una elección entre estas dos definiciones de significado físico y significado lógico, debemos tener claramente en mente que esta es una cuestión de decisión volitiva y no de carácter alético. Sería enteramente erróneo preguntar: ¿Cuál es la verdadera concepción del significado? o ¿Qué concepción debo yo elegir? Tales preguntas son no-significativas porque el significado solamente puede ser determinado por definición. Lo que podríamos hacer es proponer la aceptación de esta decisión. Hay, sin embargo, dos cuestiones de carácter alético conectadas con la decisión. Como mostramos antes, estas son cuestiones como la de la decisión realmente usada en la ciencia y como la de las decisiones implicadas por cada decisión. Comencemos aquí con la última; en lugar de sugerir propuestas preferimos el método de erigir hitos lógicos que muestren las conexiones necesarias de toda posible elección.

Hemos visto ya a través de los ejemplos dados que ambas definiciones de significado adolecen de graves desventajas. La concepción física del significado es demasiado estrecha; excluye muchos enunciados que la ciencia y la vida diaria acepta, obviamente, como significativas. La concepción lógica del significado es mejor en este respecto, pero hay el peligro opuesto de que esta concepción sea demasiado tolerante y pueda incluir como enunciados significativos a algunos que los defensores de esta concepción no incluirían con agrado dentro de esta categoría.

Tales enunciados, en verdad, existen. Los de la clase más importante son los que incluyen una infinidad de enunciados de observación. Consideremos proposiciones, que contienen «todo», referentes al límite de la frecuencia relativa en una serie infinita de eventos, como ocurre en estadística. No es una contradicción imaginar a un observador que vive eternamente y que cuente tal serie. Pero los defensores de la teoría alética del significado tienen una natural aversión a proposiciones de este tipo; y ellos justifican esto insistiendo en que tales proposiciones carecen de significado. Vemos que ellos presuponen, por tanto,

el concepto físico de significado. Este concepto, de otro lado, parece demasiado estrecho; nosotros quisiéramos permanecer de acuerdo con los fisicalistas pero no nos gustaría estar obligados a rechazar proposiciones como las concernientes a la estructura de los átomos al interior del sol.

Nuestro análisis, consecuentemente, no conduce a preferir una de las dos concepciones. No conduce ni a una ni a otra; o mejor dicho, conduce a ambas. En verdad, ambas concepciones son de un cierto valor y pueden ser usadas; lo que solamente se demanda es un claro establecimiento, en cada caso, de cuál de las dos concepciones tenemos en mente.

Esto también corresponde al procedimiento de la ciencia real. Hay muchos ejemplos famosos en la moderna física de la aplicación del concepto de significado físico. El rechazo de Einstein de la simultaneidad absoluta es de esta clase, está basado en la imposibilidad de señales moviéndose a mayor velocidad que la luz, y esto, por supuesto, es solamente imposibilidad física. Aplicando en su lugar el concepto de significado lógico podríamos decir que la simultaneidad absoluta es significativa porque puede imaginarse que no hay límite para incrementar la velocidad de las señales. La diferencia entre estos dos conceptos de significado ha sido formulada como sigue: para nuestro mundo la simultaneidad absoluta carece de significado pero para otro mundo puede tener significación. La especificación *«para nuestro mundo»* expresa el reconocimiento de las leyes físicas para la definición de la posibilidad de verificación. En el mismo sentido, es imposible sólo para nuestro mundo observar el interior del electrón y, así, proposiciones concernientes a esta materia son no-significativas solamente para nuestro mundo. Si se usa una clara terminología se evita la ambigüedad y ambas concepciones pueden ser admitidas.

Procedamos ahora a un examen del segundo principio de la teoría alética del significado y de su aplicación a los enunciados de observación. Este principio determina que dos enunciados dados tienen la misma significación cuando cualquier hecho posible conduce al mismo valor de verdad para ambos. El sentido de esta determinación debe ser considerado ahora.

Cuando nosotros introdujimos el segundo principio en el ejemplo del juego de ajedrez, el pleno sentido del principio no pudo ser reconocido porque el lenguaje en cuestión fue muy simple y referido solamente a objetos simples. En el lenguaje de la ciencia sin embargo, el segundo principio gana un sentido muy amplio. Sucede frecuentemente que ciertos enunciados parecen tener un muy diferente significado mientras que un posterior examen muestra que ellos son verificados por las mismas observaciones. Un ejemplo sería el concepto de movimiento. Cuando nosotros decimos que el cuerpo **A** se mueve hacia el cuerpo **B**, nosotros creemos que estamos estableciendo un hecho diferente del caso en el cual **B** se mueve hacia **A**. Puede ser demostrado, sin embargo, que ambos enunciados son verificados, respectivamente, por los mismos hechos observables. La famosa teoría de la relatividad de Einstein puede ser concebida como una consecuencia que se sigue del segundo principio positivista del significado. La función de este principio es suprimir lo que podemos llamar la intensión subjetiva del significado y, en su lugar, determinar el significado de una manera objetiva. Es solamente por la adición de este principio que la actitud anti-metafísica de los positivistas es completa, habiendo sido inaugurada con el primer principio.

Debemos añadir algunas anotaciones concernientes al término *«posibilidad»* dentro de la formulación del segundo principio, las cuales hacen uso de nuestra distinción concerniente a la definición de posibilidad.

Para evitar contradicciones usamos para el segundo principio la misma definición de posibilidad que para el primero. Así, para el significado físico, el segundo principio es concebido como prescribiendo la misma significación para dos proposiciones si no es físicamente posible observar hechos los cuales proporcionen una diferente verificación para las dos proposiciones en cuestión; para el significado lógico, consecuentemente, la igualdad de significado es dependiente de la imposibilidad lógica de encontrar diferentes verificaciones. Nuestro ejemplo concerniente a la relatividad del movimiento corresponde al significado físico. Es físicamente imposible encontrar hechos los cuales confirmen al enunciado «**A**» se mueve hacia «**B**» y no confirmen al enunciado «**B**» se mueve hacia «**A**», este es el contenido del principio de relatividad de Einstein. Einstein no habla de necesidad lógica aquí; al contrario, él enfatiza el origen empírico de su principio y justamente en las palabras *«físicamente imposible»* en las que este origen empírico resulta manifiesto. El análisis ha mostrado que es lógicamente posible imaginar hechos que las dos proporciones en cuestión; así es lógicamente posible imaginar un mundo en el cual el principio de relatividad no se cumpla. El concepto de movimiento absoluto, por tanto, tiene significado lógico. Es solamente para nuestro mundo que no se aplica.

No intentemos entrar aquí dentro de un más detallado análisis de estas cuestiones. La función del segundo principio es dependiente de la concepción que se tenga del primero. En consecuencia, continuaremos ahora nuestra exposición del primer principio y entraremos a una necesaria crítica de él.

Nuestra discusión de este principio no fue satisfactoria. Nosotros arribamos a dos definiciones del significado y mostramos que ambas pueden ser toleradas; pero nuestros sentimientos subjetivos están a favor de una de ellas, expresamente, de la definición que demanda posibilidad física de verificación, la cual, consecuentemente, proporciona el más riguroso concepto de significado. El concepto de significado físico parece sonar mejor que el de significado lógico y el reciente progreso epistemológico de la física se debe en verdad al énfasis puesto en esta concepción. La purificación hecha por Einstein de las doctrinas del espacio-tiempo, la elucidación de la teoría de átomos por la teoría cuántica y otras clarificaciones similares han sido efectuadas por el uso del concepto riguroso de significado físico. La ventaja de este concepto descansa en su saludable atractivo para restringir el sentido de descripciones de operaciones practicables. Nosotros hablamos del concepto de *posibilidad técnica*; si este concepto fue rechazado para la definición de verificabilidad es porque no puede ser claramente demarcado y se modificaría con el avance de las habilidades técnicas de la especie humana. El dominio de lo técnicamente posible tiene como su límite superior a la posibilidad física, en este sentido podemos decir que la decisión de adoptar el significado físico es la decisión por las operaciones practicables. Sería, por tanto, el propósito de la epistemología construir una teoría física en la cual todas las proposiciones referentes a nuestro mundo estuvieran justificadas por el significado físico sin necesitar, para ser fundamentadas, del concepto de significado lógico.

Este postulado no es satisfecho por las consideraciones previamente desarrolladas. Nosotros encontramos que las proposiciones concernientes al remoto futuro o a la estructura del átomo presuponen el significado lógico porque ellas no pueden ser verificadas, si las leyes

de la física se cumplen. Pero aunque esta afirmación fuera verdadera nosotros tenemos la sensación de que la justificación de dichas proposiciones por el significado lógico violenta lo que realmente pensamos. No estamos de acuerdo en que aceptamos un enunciado acerca de la temperatura en el interior del Sol solo porque podemos imaginarnos un termómetro el cual dócilmente continúa cumpliendo su función en condiciones bajo las cuales todos los otros cuerpos se vaporizan. No creemos que los enunciados físicos concernientes a la estructura del átomo tienen significación solamente porque podemos imaginar nuestro propio cuerpo empequeñecido a dimensiones atómicas, observando los movimientos de los electrones como observamos la salida del Sol. Debe haber algo incorrecto en nuestra teoría del significado y nosotros vamos a tratar de descubrir qué es.

II El significado de las proposiciones indirectas y los dos principios de la teoría probabilística del significado

Un camino al margen de esta dificultad ha sido señalado por el pragmatismo y el positivismo. Consiste en introducir un segundo tipo de verificación el cual llamaremos *verificación indirecta*. Hay proposiciones las cuales no pueden ser directamente verificadas pero las cuales son reducibles a otras susceptibles de verificación directa. Llamemos a las proposiciones de esta clase proposiciones indirectas; consecuentemente, las proposiciones de observación pueden ser llamadas proposiciones directas.

Usando estos conceptos construimos una solución de la siguiente manera. Nosotros retenemos la exigencia de posibilidad física, así usamos el concepto de significado físico solo. Pero aquellas proposiciones que resulten inverificables desde esta definición no serán consideradas más como proposiciones de observación; ellas cambian de proposiciones directas a indirectas. Así ellas adquieren una significación indirecta; y la ocurrencia de tales proposiciones en física no está más en contradicción con el postulado de significado físico.

Antes de entrar en un análisis detenido de este plan permítasenos añadir una apostilla. La cuestión de si es o no directa una proposición no puede ser absuelta inequívocamente; la respuesta depende de la definición de «significado». Tomemos nuestra proposición concerniente a la temperatura en el interior del sol; desde el punto de vista del significado lógico es directa; desde el significado físico no lo es. Lo mismo se cumple para el término *«proposición de observación»*. Este término parece tener un significado claro pero nosotros encontramos que su significado depende de la definición de la posibilidad de observación. Observar la temperatura del interior del sol en el mismo sentido en que observamos la temperatura de nuestro cuarto es lógicamente posible pero no físicamente. Así todas estas categorías de enunciados no tienen un significado absoluto sino variable conforme a la definición de significado.

Permítasenos considerar ahora la cuestión de la verificación indirecta. La determinación de este término es sugerida por el método de verificación usado en la práctica científica. La temperatura del sol es medida de un modo muy complicado. Los físicos observan la energía contenida en los rayos de luz de diferentes colores que son emitidos por el sol y, comparando con la distribución obtenida en observaciones análogas de rayos de luz terrestres, ellos calculan la temperatura de la superficie solar. Las regularidades presupuestas en estas mediciones están contenidas en las leyes de radiación. Después de determinar la temperatura de la superficie

del sol, el físico, mediante más que vagos y especulativos cálculos, llega finalmente al número de cuarenta millones de grados para el interior del sol; estos cálculos contienen un número de observaciones físicas de toda clase, especialmente aquellas incluidas en la teoría de átomos.

Nosotros encontramos que de esta manera los enunciados indirectos son reducidos a una clase de enunciados directos. Estos enunciados directos se refieren a instrumentos eléctricos y ópticos de medida, termómetros, colores, etc. pero todos están en nuestra tierra en los laboratorios físicos, de tal modo que ninguna visita al sol es necesaria. Es verdad que hay tal reducción de enunciados indirectos a directos. Lo que tenemos que estudiar es la clase de relación entre las dos categorías.

Pragmatistas y positivistas han hecho el intento de clarificar esta relación. Este intento está basado en la suposición de que hay una equivalencia entre el enunciado indirecto, de un lado, y la clase de enunciados directos de otro lado. La estructura de esta clase de enunciados directos puede ser más que complicada; no está simplemente construida en la forma de una conjunción de enunciados directos, por ejemplo, una combinación ligada por «**y**», sino que puede contener disyunciones, negaciones, implicaciones, etc. Esto es obvio aún en un caso simple: para medir la temperatura de nuestra habitación nosotros podemos usar el termómetro de mercurio o un termómetro de alcohol. Esta «**o**» será transferida a la clase de proposiciones directas equivalentes al enunciado concerniente a la temperatura de nuestro cuarto. Denotemos al agregado de proposiciones directas por $(a_1, a_2, ..., a_n)$, la proposición indirecta por A; luego el positivismo sostiene la equivalencia.

$$A \equiv (a_1, a_2, ..., a_n) \quad (1)$$

El signo ≡ denota igualdad de valores de verdad, por ejemplo, si un lado es verdadero, el otro lado es verdadero también; y si un lado es falso, luego el otro también es falso. Aplicando ahora el segundo principio de la teoría alética del significado encontramos que la proposición indirecta A tiene el mismo significado que la clase de las proposiciones directas.

Llamaremos a este método de determinación del significado de las proposiciones indirectas el *principio de regresión*. De acuerdo a este principio, el significado de las proposiciones indirectas es obtenido mediante la construcción de proposiciones de observación desde las cuales la proposición indirecta es inferida; el principio de regresión sostiene que esta inferencia debe ser interpretada como una equivalencia y que el significado de la conclusión de la inferencia es el mismo que el de las premisas de la inferencia. El significado de las proposiciones indirectas es consecuentemente construido por regresión, vale decir, por un proceso inverso al procedimiento del científico. El científico avanza de las proposiciones de observación a las proposiciones indirectas; el filósofo, para los fines de interpretación, va hacia atrás de las proposiciones indirectas a sus premisas. Esa es la idea expresada por Wittgenstein en su fórmula: el significado de una proposición es el método de su verificación[70]. El pragmatismo en sus primeros tiempos ha expresado la misma idea llamando a las proposiciones de observación el *«valor efectivo»* de la proposición indirecta[71].

70 Aunque esta fórmula no está expresamente en el *Tractatus Lógico Philosophicus* de Wittgenstein (Londres 1922), ella expresa sus ideas muy adecuadamente y ha sido usada, con esta intención, dentro del «Círculo de Viena».

71 Cf. James, W. (1970) *Pragmatismo* (Nueva York, Conferencia VI: ¿Cómo se realizará la verdad? ¿Qué experiencia serán diferentes de aquellas las cuales se obtendrán si la creencia fuera falsa? ¿Cuál es en breve, el valor de verdad efectivo en términos de experiencia? Esta idea se remonta a la máxima del pragmatismo de C.S. Pierce, pronunciada por primera vez en 1878: «Considerando aquellos efectos, que los concebimos teniendo sentido práctico, nosotros concebimos el objeto que nuestra concepción tiene. Luego, nuestra concepción de estos efectos es nuestra concepción

Esta teoría de la equivalencia del significado indirecto es muy seductora sobre la base de su simplicidad y claridad. Si ella fuera fundada, la teoría del conocimiento adquiriría una forma muy simple: todo aquello que la física establece sería una sumatoria de proposiciones de observación. Esto ha sido, en verdad, enfatizado por los positivistas. Pero esta teoría no resiste una crítica más rigurosa.

No es verdad que la clase de enunciados directos que aparece a la derecha de la equivalencia (1) sea finita. El signo de equivalencia ≡ significa una doble implicación, esto es, una implicación de izquierda a derecha y otra de derecha a izquierda. Por tanto, las proposiciones $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$, comprenden la serie total de proposiciones desde la cual A puede ser inferida y al mismo tiempo, todas las proposiciones que pueden ser inferidas desde A. Pero esta no es una clase finita, es prácticamente una infinita, esto es, una clase la cual nunca puede ser exhaustivamente dada a seres humanos. Tómese como ejemplo el enunciado A referente a la temperatura del sol. Entre $\mathbf{a_1, a_2, ..., a_n}$ nosotros tenemos, luego, observaciones referentes a la radiación de los rayos del sol y cuerpos calientes, observaciones referentes a líneas espectrales, etc. Es verdad que la clase de las proposiciones de la que comenzamos a inferir A es finita y aun prácticamente finita, pues nosotros tenemos siempre un número finito de proposiciones. Pero la clase de las proposiciones que nosotros podemos inferir de A no es finita. Nosotros podemos inferir de A que la temperatura de un cuerpo, llevado a cierta distancia r próxima al sol sería de T grados; nosotros no podemos cumplir este experimento porque nosotros no podemos dejar la superficie de la tierra. Hay una clase infinita de tales enunciados; haciendo variar r a través de todos los posibles valores numéricos esta clase sería infinita. Es, en consecuencia, un grave error pensar que el lado derecho de (1) puede ser siempre prácticamente dado.

Esto necesita una anotación adicional. Hay un caso en el cual la infinidad de consecuencias derivadas desde A no presentaría dificultad alguna: esto sería así si las mismas consecuencias pudieran ser inferidas desde el conjunto finito $(a_1, a_2, ..., a_n)$. En este caso nuestro conocimiento del conjunto $(a_1, a_2, ..., a_n)$ nos capacitaría para afirmar la clase total de consecuencias derivadas de A; no habría ningún incremento de significado en A comparado con el conjunto $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Pero esto obviamente no es el caso en física. Para las proposiciones físicas la proposición A tiene un incremento de significado; y las consecuencias inferidas desde A no pueden ser inferidas desde el conjunto $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Que la temperatura a la distancia **r** del sol tiene un valor T no puede ser lógicamente inferido de $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$; es lógicamente posible que futuras observaciones en un lugar distante **r** del sol proporcionen un valor diferente de T a pesar del conjunto previamente observado $(a_1, a_2, ... a_n)$. Esto se debe a la independencia de las observaciones empíricas; no hay ninguna necesidad lógica de que las futuras observaciones deban corresponder a las primeras o a cualquier resultado esperado. Es porque el enunciado físico A incluye predicciones para futuras observaciones que contiene un incremento de significado comparado con el conjunto $(a_1, a_2, ..., a_n)$; y es la indeterminación del futuro la que hace inútil la teoría positivista de la equivalencia referente a proposiciones indirectas.

Las conexiones reales son de carácter más complicado. Nosotros partimos de una clase finita de proposiciones $(a_1, a_2, ..., a_n)$; pero desde esta clase no hay implicación lógica alguna hacia A. Lo que nosotros tenemos es solamente una *implicación de pro-*

íntegra del objeto» (*Collected Papers de C.S. Peirce*, V, Cambridge, Mass.1934, 1) El desarrollo lógico de la teoría inaugurada por esta fórmula es debido principalmente a James, Dewey y Schiller.

babilidad. Denotemos la implicación de probabilidad por el signo $\vec{p}$; luego tenemos que escribir

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \vec{p} A \qquad (2)$$

De otro lado aun las inferencias de A hacia $a_1, a_2, ..., a_n$ no son absolutamente seguras, pues puede suceder que A sea verdadera mientras que $a_1, a_2, ..., a_n$ no sean verdaderas aunque esto es muy improbable. Así tenemos también una implicación de probabilidad y[72] no una implicación lógica, de A hacia $a_1, a_2, ..., a_n$

$$A \vec{p} (a_1, a_2, ..., a_n) \qquad (3)$$

La equivalencia lógica es definida por la doble implicación. Nosotros, consecuentemente, introduciremos un nuevo término para la mutua implicación de probabilidad y lo llamaremos *conexión de probabilidad.* Usando el signo para esta relación, tenemos.

$$A \vec{p} (a_1, a_2, ..., a_n) \qquad (4)$$

Esta conexión de probabilidad toma el lugar de la equivalencia (1).

El rechazo de la equivalencia (1) estuvo basado en la idea de que la clase de los enunciados de observación, los cuales pueden ser coordinados con A no es finita. Puede preguntarse ahora si hay al menos una clase infinita de enunciados de observación tal que sea equivalente a **A**. La cuestión será examinada después. Por el momento es suficiente decir que si hay tal clase equivalente, ella es infinita.

Ahora, es verdad que el control de un conjunto infinito de enunciados de observación, uno después del otro, es solo físicamente imposible y no lógicamente imposible. Así si nosotros ponemos de lado, por el momento, todas las otras dificultades en la determinación de la clase equivalente y dejamos la discusión de estas para su posterior consideración, nosotros podemos decir que la admisión del significado lógico nos capacitaría para reducir un enunciado indirecto a un conjunto equivalente de enunciados de observación. Pero nosotros debemos comprender que con esta interpretación de los enunciados indirectos la mayor parte de las proposiciones de la física resultan provistas de significado solamente porque no es lógicamente imposible contar, término por término, una serie infinita. No pensamos que ese razonamiento convenza a nadie. Nadie tomaría tal posibilidad formal dentro de la presente discusión; no es esta posibilidad lógica la que nos conduce a los enunciados indirectos como significativos. Sostener la teoría de la equivalencia de las proposiciones indirectas debido a la posibilidad lógica de controlar un conjunto infinito de observaciones sería destruir la conexión entre la reconstrucción racional y la ciencia actual y aniquilaría la base misma del positivismo y del pragmatismo.

Este resultado expresa la falla definitiva de la teoría alética del significado. No es posible sostener el postulado de la verificabilidad estricta para enunciados indirectos; los enunciados de esta clase no son estrictamente verificables porque ellos no son equivalentes a una clase

72 Para las reglas de la implicación de probabilidad, véase del autor *Wahrscheinlichkeitslehre* (Leiden: Sijtnoff, 1933) cf. 9. De la obra anterior hay traducción al inglés corregida por el mismo Reichenbach y publicada por la Universidad de California, (N.del T.).

finita de enunciados directos. El principio de regresión no se cumple porque la inferencia de las premisas al enunciado indirecto no es una transformación tautológica sino una inferencia de probabilidad.

Nosotros estamos obligados, por tanto, a asumir una decisión: o renunciar a los enunciados indirectos y considerarlos como carentes de significado o renunciar a la verificabilidad absoluta como criterio de significado. La elección, me parece, no puede ser difícil como que esto ya ha sido decidido por la práctica científica. La ciencia nunca ha renunciado a los enunciados indirectos, en lugar de ello ha mostrado la manera de definir el significado por medios distintos al de la verificabilidad absoluta.

Estos medios son proporcionados por el predicado «peso». Mostramos que en todos los casos en los cuales el valor de verdad de una proposición no es conocido el valor predictivo toma su lugar. Así el valor predictivo puede cumplir la misma función para enunciados indirectos. La teoría alética del significado, en consecuencia, tiene que ser abandonada y reemplazada por la teoría probabilista del significado. Nosotros formulamos el *primer principio de la teoría probabilística del significado: una proposición tiene significado si es posible determinar un peso, esto es, un grado de probabilidad para la proposición.*

Para la definición de *«posibilidad»* aquí usada nosotros aceptamos la posibilidad física. Puede mostrarse fácilmente que esto es suficiente para garantizar la significatividad de todos los ejemplos con los que hemos tratado; no necesitamos introducir la posibilidad lógica porque aquellas proposiciones las cuales requieren de la posibilidad lógica para obtener significado, dentro de la teoría alética de la verdad, reciben significación dentro de la teoría de la probabilidad como proposiciones indirectas. Esto resulta obvio si nosotros consideramos ejemplos tales como el de un enunciado concerniente a la temperatura del sol. Es físicamente posible adscribir una probabilidad a este enunciado. Es verdad que en este caso no podemos determinar el exacto grado de probabilidad, pero esto se debe solamente a obstáculos técnicos. Nosotros tenemos al menos un estimado de la probabilidad. Esto es mostrado por el hecho de que los físicos aceptan el enunciado como moderadamente confiable y nunca admitirían enunciados que adscriban al sol una temperatura de, digamos, solamente unos cientos de grados. Será nuestra tarea, desde luego, discutir esta cuestión de la determinación de la probabilidad de una manera más detallada y lo haremos posteriormente. Por ahora, esta anotación preliminar puede ser suficiente.

El segundo principio de la teoría alética del significado puede ser reemplazado por el siguiente:

Segundo principio de la teoría probabilística del significado: dos enunciados tienen el mismo significado si ellos obtienen el mismo peso o grado de probabilidad para cada observación posible.

Como anteriormente, el concepto de posibilidad que aparece aquí es el mismo que el del primer principio; así una vez más... aceptamos la posibilidad física para nuestra definición.

Llamemos al significado definido por estos dos principios *significado probabilístico;* el concepto de significado desarrollado con anterioridad puede, por tanto, ser llamado *signi-*

ficado alético. Debido a la distinción entre posibilidad lógica y física, el significado alético se bifurca en significado *alético físico* y significado *alético lógico*. Puede preguntarse si hay la misma bifurcación para el significado probabilístico. Tal distinción termina por ser superflua porque la combinación de la posibilidad lógica con el peso no proporciona un concepto distinto del significado lógico alético; si es lógicamente posible obtener un peso para un enunciado es también lógicamente posible obtener una verificación. Solamente razones físicas pueden excluir la verificación y al mismo tiempo permitir la determinación de un peso; si desestimamos las leyes de la física nos entregamos a la imaginación y, libres de los experimentos físicos, no necesitamos distinguir la posibilidad de la determinación de un peso de una verificación. Así el significado probabilístico lógico y el significado alético lógico son idénticos.

El significado probabilístico, en consecuencia, siempre es significado probabilístico físico. Nosotros podemos, consecuentemente, suprimir la adición «físico» y hablar simplemente de significado probabilístico; ambos, el significado probabilístico y el significado alético físico, pueden ser expresados por el nombre de *significado físico*.

La teoría probabilística del significado puede ser considerada como una expansión, de la teoría alética del significado físico, en la que el postulado de verificabilidad es tomado en un sentido más amplio, incluyendo la posibilidad física de determinar o el valor alético o un peso. Nosotros incluiremos, por tanto, ambas teorías bajo el nombre de *teoría de la verificabilidad del significado*. El sentido más estrecho de verificación será expresado por *«verificación absoluta»*.

La justificación de esta expansión es dada por el hecho de que esta teoría, y solamente esta teoría, corresponde a la práctica de la ciencia. Cuando un hombre de ciencia habla de la temperatura del sol, él no toma este enunciado como significativo porque hay una posibilidad lógica de verificación directa sino porque hay una posibilidad física de inferir la temperatura del sol desde observaciones terrestres. El hombre de ciencia también sabe que esta inferencia no es lógica sino de probabilidad. Puede suceder que todas sus premisas $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ...,$\mathbf{a}_n$ sean verdaderas pero que la conclusión A de la inferencia sea falsa; por tanto, el científico puede afirmar A solamente con cierto grado de probabilidad.

Algunas anotaciones suplementarias deben ser añadidas. Nosotros introdujimos el concepto de *«proposición indirecta»* para obtener significatividad para enunciados que no la tenían bajo la presuposición de cierta definición de significado, pero si la tenían bajo otra definición de significado, siendo luego proposiciones de observación. Hay, además, otras proposiciones las cuales en todo caso no son proposiciones de observación para cualquier definición de significado y las cuales deben ser concebidas como proposiciones indirectas para toda teoría del significado. Tales son las proposiciones referentes al desarrollo de la especie humana, a las especies biológicas, al sistema planetario, en general enunciados cuyos objetos son tan grandes, o tan extensos temporalmente que una visión directa de ellos en todo caso no es posible. A estas proposiciones pertenecen, asimismo, enunciados concernientes a materias abstractas tales como el espíritu de Renacimiento, el carácter egoísta de cierta persona y así por el estilo. Todas estas proposiciones tienen que ser tratadas como indirectas.

Para todas estas proposiciones es válida también nuestra tesis de que no hay, en general, equivalencia lógica entre las proposiciones generales o abstractas y el agregado de

proposiciones de observación en el cual ellas se basan. Esto es obvio desde el hecho de que nunca estamos absolutamente seguros de la proposición indirecta aunque las proposiciones básicas sean de la más alta certeza. Los hechos desde los que inferimos el carácter egoísta de un hombre pueden ser indudablemente ciertos; pero esto no excluye nuestra observación, en algún momento posterior, de algunas acciones del hombre que no son compatibles con la hipótesis de egoísmo.

Proposiciones de esta clase demanda la misma expansión del concepto de significado que fue hecha antes; solamente la teoría probabilística del significado puede hacer justicia a ellas sin violentar el uso real de tales proposiciones en la ciencia o en la vida diaria. Así no podemos aceptar la interpretación positivista de que esas proposiciones son equivalentes a un conjunto finito de proposiciones verificables; las tomamos a ellas como significativas solo porque poseen un cierto peso derivado de la observación.

Verdad y prueba[73]

El tema de este artículo es antiguo. Frecuentemente ha sido tratado en la lógica moderna y en la literatura filosófica. No será fácil añadir algo original a la discusión, temo que para muchos lectores ninguna de las ideas que se presentan en este artículo será esencialmente nueva, sin embargo, espero que puedan encontrar algo de interés en la manera en que el material ha sido ordenado y relacionado.

Tal como lo indica el título, deseo tratar aquí dos nociones diferentes pero relacionadas: el concepto de verdad y el concepto de prueba. En realidad, el artículo se divide en tres partes. La primera se refiere exclusivamente al concepto de verdad, la segunda trata principalmente el concepto de prueba y la tercera es una discusión sobre la relación entre estos dos conceptos.

El concepto de verdad

La tarea de explicar el significado del término *'verdadero'* se interpretará aquí de una manera restringida. El concepto de verdad se da en muchos contextos diferentes y hay muchas categorías distintas de objetos a los que se aplica el término *'verdadero'*. En un debate sicológico, se puede hablar de emociones verdaderas así como también de creencias verdaderas; en un discurso del campo de la estética, se podrá analizar la verdad interna de un objeto de arte. No obstante, en este artículo estamos interesados solamente en lo que podríamos denominar concepto lógico de verdad.

De una forma más específica, nos ocupamos exclusivamente del significado del término *'verdadero'* cuando es empleado para referirse a oraciones. Se presume que este fue el empleo que se le dio originalmente al término *'verdadero'* en el lenguaje humano. Las oraciones son tratadas aquí como objetos lingüísticos, como ciertos conjuntos de sonidos o signos escritos, por supuesto, no todo conjunto de esta clase es una oración. Además, al hablar de oraciones, siempre debemos tener presente lo que en gramática se denominan oraciones declarativas mas no oraciones interrogativas o imperativas.

Siempre que alguien explica el significado de cualquier término tomado del lenguaje cotidiano, deberá tener en cuenta que la meta y el estatus lógico de tal explicación puede variar de un caso a otro. Por ejemplo, la explicación podría considerarse como un informe sobre el uso real del término examinado, y por tanto, está sujeto a cuestionamiento si, en realidad, el informe es correcto. En algún otro momento, una explicación podría haber sido

73 Artículo de Alfredo Tarski publicado en *Scientific American* con el título *Truth and Proof*, Junio 1969, Volumen 220, pp. 63-77. La traducción es de Luis Adolfo Piscoya Hermoza.

de naturaleza normativa, es decir, podría sugerirse que el término sea empleado de alguna forma definida, sin reclamar que la sugerencia corresponde a la manera en que se emplea realmente el término; una explicación así puede ser evaluada, por ejemplo, desde el punto de vista de su utilidad pero no de lo correcto. También podemos mencionar algunas otras alternativas.

La explicación que queremos dar en este caso, en cierta medida, es de carácter mixto. La que se ofrecerá puede ser tomada en principio como una sugerencia que propone una forma definida de emplear el término *'verdadero'*, pero la oferta estará acompañada por la creencia de que está de acuerdo con el uso predominante de este término en el lenguaje cotidiano.

Lo que entendemos por el concepto de verdad parece concordar esencialmente con diversas explicaciones de este concepto que han sido dadas en la literatura filosófica. La que podría ser la primera explicación puede encontrarse en la *Metafísica* de Aristóteles:

Decir que lo que es, no es, o que lo que no es, es, es falso, mientras que decir que lo que es, es o que lo que no es, no es, es verdadero.

Aquí y en lo que resta del artículo, la palabra *'falso'* equivale a la expresión *'no verdadero'* y puede ser remplazada por esta última.

El contenido intuitivo del enunciado de Aristóteles parece ser relativamente claro. No obstante, el enunciado deja mucho que desear desde el punto de vista de la precisión y de lo que formalmente es correcto. Por alguna razón, no es lo suficientemente general, se refiere solamente a las oraciones que dicen de algo *«que es»* o *«que no es»*; en la mayoría de los casos difícilmente sería posible presentar una oración en este molde sin malinterpretar su sentido y forzando el espíritu del lenguaje. Esta es quizás una de las razones por las que existen sustitutos para el enunciado aristotélico en la filosofía moderna. Podemos mencionar como ejemplos:

Una oración es verdadera si denota la situación existente

La veracidad de una oración consiste en su conformidad (o correspondencia) con la realidad.

Debido al empleo de términos filosóficos técnicos, estos enunciados indudablemente tienen un sentido muy «ilustrado». Sin embargo, pienso que los nuevos enunciados, al ser analizados más detalladamente, demuestran ser menos claros e inequívocos que el presentado por Aristóteles.

El concepto de la verdad que encuentra su expresión en el enunciado aristotélico (y en enunciados de origen más reciente) generalmente se le conoce como *el concepto clásico o semántico de verdad*. Al hablar de semántica nos referimos a la lógica que, hablando vagamente, trata de las relaciones entre los objetos lingüísticos (como las oraciones) y lo que se expresa mediante dichos objetos. El carácter semántico del término *'verdadero'* se define claramente con la explicación presentada por Aristóteles y con algunos enunciados que serán presentados más adelante en este artículo. A veces se habla de la teoría de la correspondencia sobre la verdad como la teoría basada en el concepto clásico.

En la literatura filosófica moderna también se tratan otras concepciones y teorías de la verdad, como la concepción pragmática y la teoría de la coherencia. Estas concepciones parecen ser de un carácter exclusivamente normativo y tienen poca relación con el empleo real del término *«verdadero»;* ninguna de ellas ha sido formulada hasta ahora con algún grado de precisión y claridad. Estas no serán tratadas en este artículo.

Aquí trataremos de obtener una explicación más precisa de la concepción clásica de verdad, una que pueda sustituir al enunciado aristotélico pero que mantenga sus intenciones básicas. Para este fin tendremos que recurrir a algunas técnicas de la lógica contemporánea. También tendremos que especificar el lenguaje de cuyas oraciones nos estamos ocupando, esto es necesario solamente por la razón de que un conjunto de sonidos o signos, que constituye una oración verdadera o falsa pero que de todos modos es una oración con sentido en un lenguaje, puede ser una expresión sin sentido en otro. Por ahora, asumamos que el lenguaje que estamos considerando es el inglés cotidiano.

Empezamos con un simple problema. Consideremos una oración cuyo significado no dé lugar a dudas, por ejemplo, *'La nieve es blanca'*. Para abreviar, representamos esta oración con la letra **'S'**, de tal manera que **'S'** es el nombre de la oración. Nos formulamos la siguiente pregunta: ¿Qué queremos dar a entender cuando decimos que **'S'** es verdadera o que es falsa? La respuesta a esta pregunta es simple: en el sentido de la explicación aristotélica, al decir que **'S'** es verdadera, queremos decir que la nieve es blanca, y al decir que **'S'** es falsa queremos decir que la nieve no es blanca. Al eliminar el símbolo **'S'**, llegamos a los siguientes enunciados:

1) ***'La nieve es blanca'****, es verdadera si y sólo si la nieve es blanca.*

'1) ***'La nieve es blanca'****, es falsa si y solo si la nieve no es blanca.*

Por tanto, 1) y '1) nos brindan explicaciones satisfactorias del significado de los términos *'verdadero'* y *'falso'* cuando estos términos se refieren a la oración *'La nieve es blanca'*. Podemos considerar 1) y '1) como definiciones parciales de los términos *'verdadero'* y *'falso'*, en realidad, como definiciones de estos términos con respecto a una oración en particular. Observemos que 1) así como '1) tienen la forma prescrita para definiciones a través de las reglas de la lógica, es decir, la forma de la equivalencia lógica. Esta consta de dos partes, el lado izquierdo y el lado derecho de la equivalencia, ligados ambos por la conectiva *'si y solo si'*. El lado izquierdo es el *definiendum*, la frase cuyo significado se explica por definición; el lado derecho es el *definiens*, que es la frase que brinda la explicación. En este caso, el *definiendum* es la siguiente expresión:

'La nieve es blanca' es verdadera;

el *definiens* tiene la siguiente forma:

la nieve es blanca.

En un primer momento, parecería que 1), al ser considerada como una definición, presenta un defecto importante ampliamente discutido en la lógica tradicional como círculo vicioso.

La razón es que algunas palabras, por ejemplo '*nieve*', se presentan tanto en el *definiens* como en el *definiendum*. Sin embargo, en realidad, estos casos tienen un carácter totalmente diferente. La palabra '*nieve*', es una parte sintáctica u orgánica del *definiens*, en realidad, el *definiens* es una oración y la palabra '*nieve*' es su sujeto. El *definiendum* también es una oración, expresa el hecho de que el *definiens* es una oración verdadera. Su sujeto es el nombre del *definiens* que se forma colocando el *definiens* entre comillas simples, (cuando decimos algo de un objeto, se emplea siempre el nombre de este objeto y no el objeto en sí, inclusive cuando tratamos con objetos lingüísticos). Por muchas razones, una oración entre comillas simples debe ser considerada gramaticalmente como una sola palabra sin partes sintácticas. Por consiguiente, la palabra '*nieve*' que indudablemente se presenta en el *definiendum* como una parte, no se presenta ahí como una parte sintáctica. Un lógico medieval diría que '*nieve*' se da en el *definiens in suppositione formalis* y en el *definiendum in suppositione materialis*. Así pues, las palabras que no constituyen partes sintácticas del *definiendum* no pueden crear un círculo vicioso, y el peligro de que este se produzca desaparece.

Las observaciones anteriores se refieren a algunas cuestiones que son más sutiles y que no son muy simples desde el punto de vista lógico. En vez de trabajar en base a ellas, indicaré otra manera que descarte todo temor de un círculo vicioso. Para formular 1), hemos aplicado el método común de formar el nombre de una oración o de cualquier otra expresión escribiéndola entre comillas simples. El método tiene muchas ventajas, pero también es la fuente de las dificultades tratadas anteriormente. Para eliminar estas dificultades, empleemos otro método para formar nombres de expresiones, en realidad un método que pueda ser caracterizado como una descripción letra por letra de una expresión. Empleando este método, obtendremos en vez de 1), la siguiente fórmula:

2) El conjunto de cuatro palabras, la primera de las cuales es el conjunto de las letras ele y a; la segunda es el conjunto de letras ***ene, i, e, ve*** *y* ***e****; la tercera es el conjunto de las letras e y ese; y la cuarta es el conjunto de las letras* ***be, ele, a, ene, ce*** *y* ***a****, es una oración verdadera si y sólo si la nieve es blanca.*

La fórmula 2) no es diferente a la 1) en su significado; simplemente 1) puede considerarse como una forma abreviada de 2). Ciertamente, la nueva formulación es mucho menos clara que la anterior, pero tiene la ventaja de que no crea apariencia de círculo vicioso.

Se puede elaborar definiciones parciales de verdad análogas a 1) o 2) también para otras oraciones. Cada una de estas definiciones tiene la siguiente forma:

3) ***'p'*** *es verdadera si y solo si* ***p****,*

donde '**p**' debe ser reemplazada en ambos lados de 3) por la oración para la que se ha elaborado la definición. No obstante, se debe poner especial atención en aquellas situaciones en que la oración que reemplaza a '**p**' resulta contener la palabra '*verdadero*' como una parte sintáctica. La correspondiente equivalencia 3) entonces no puede ser considerada como una definición parcial de verdad, ya que, al ser tratada como tal, obviamente provocaría un círculo vicioso. Aun en este caso, sin embargo, 3) es una oración con sentido y en realidad es una oración verdadera desde el punto de vista de la concepción clásica de verdad. Para ilustrar, imaginemos que al revisar un libro encontramos la siguiente oración:

4) *No todas las oraciones de este libro son verdaderas.*

Aplicando a 4) el criterio aristotélico, vemos que la oración 4) es verdadera si, en realidad, no todas las oraciones que aparecen en el libro mencionado son verdaderas, y que de lo contrario 4) es falsa; en otras palabras, podemos afirmar la equivalencia obtenida de 3) tomando 4) por '**p**'. De hecho, esta equivalencia establece simplemente las condiciones en las que la oración 4) es verdadera o no es verdadera, pero por sí misma, la equivalencia no nos permite determinar cuál es el caso en realidad. Para verificar el juicio expresado en 4) tendríamos que leer detenidamente el libro mencionado y analizar la verdad de las oraciones contenidas en él.

A la luz del debate anterior podemos ahora formular nuestro principal problema. Estipulamos que el empleo del término *'verdadero'*, en referencia a las oraciones en castellano[74], solo se ajusta a la concepción clásica de verdad si nos permite afirmar todas las equivalencias de la forma 3) en donde '**p**' se reemplaza a ambos lados por una oración arbitraria en castellano. Si se cumple esta condición, debemos decir simplemente que el empleo del término *'verdadero'* es adecuado. Así pues, nuestro principal problema es: ¿Podemos establecer un empleo adecuado del término *'verdadero'* para oraciones en castellano, y, de ser así, mediante qué métodos? Desde luego nosotros podemos formular una pregunta análoga para oraciones en cualquier otro idioma.

El problema se resolverá por completo si podemos elaborar una definición general de verdad que sea adecuada en el sentido que contendrá como consecuencias lógicas a todas las equivalencias de la forma 3). Si esta definición es aceptada por la gente de habla castellana, establecerá obviamente un adecuado empleo del término *'verdadero'*.

Bajo ciertas suposiciones esenciales la construcción de una definición general de verdad es simple. Asumamos pues que estamos interesados no en todo el idioma castellano** sino únicamente en una parte de este, y que deseamos definir el término *'verdadero'* exclusivamente en referencia a las oraciones de esa parte del idioma que denominaremos lenguaje **L**. Asumamos además que **L** cuenta con reglas sintácticas precisas que nos permiten, en cada caso en particular, distinguir una oración de una expresión que no es una oración y que el número de oraciones en el lenguaje **L** es finito (aunque posiblemente muy extenso). Finalmente, asumimos que la palabra *'verdadero'* no se da en **L** y que el significado de todas las palabras en L es lo suficientemente claro por lo que no tenemos ninguna objeción para emplearlas para definir la verdad. Según estas suposiciones procedemos de la siguiente manera. En primer lugar, preparamos una lista completa de todas las oraciones en L; supongamos por ejemplo, que hay exactamente 1 000 oraciones en **L** y que acordamos emplear los símbolos '$\mathbf{s}_1$', '$\mathbf{s}_2$', ..., '$\mathbf{s}_{1000}$' como abreviaciones para las oraciones consecutivas en la lista. Luego para cada una de las oraciones '$\mathbf{s}_1$', '$\mathbf{s}_2$', ..., '$\mathbf{s}_{1000}$' construimos una definición parcial de verdad sustituyendo sucesivamente estas oraciones por '**p**' en ambos lados del esquema 3). Finalmente, formulemos la conjunción lógica de todas estas definiciones parciales; en otras palabras, combinémoslas en un enunciado poniendo la conjunción '**y**' entre dos definiciones parciales consecutivas. Lo único que queda por hacer es dar a la conjunción resultante una forma diferente pero lógicamente equivalente para satisfacer los requerimientos formales

74 En el texto original el autor, naturalmente, se refiere al idioma inglés. Hemos traducido trasladando la referencia al castellano debido a que este cambio no altera las tesis sostenidas por Tarski (N.del T.).

impuestos a las definiciones por las reglas de la lógica:

(5) *Para cada oración* ***x*** *(en el lenguaje* ***L****),* ***x*** *es verdadera si y solo si:*

s_1, *y* ***x*** *es idéntica a* 's_1', *o*

s_2, *y* ***x*** *es idéntica a* 's_2', ...

.....

.....

o finalmente,

s_{1000}, *y* ***x*** *es idéntica a* 's_{1000}'.

Hemos llegado así pues a un enunciado que puede ser aceptado como la definición general deseada de verdad: es formalmente correcta, y es adecuada, en el sentido que implica a todas las equivalencias de la forma 3) en donde '**p**' ha sido reemplazada por cualquier oración del lenguaje **L**. Al avanzar nos damos cuenta que 5) es una oración en castellano pero obviamente no en el idioma **L**; puesto que (5) contiene a todas las oraciones en **L** como partes propias y no coincide con ninguna de ellas. Un debate más extenso dará más claridad a este punto.

Por razones obvias el procedimiento que acabamos de señalar no puede ser seguido si estamos interesados en todo el idioma castellano y no solamente en una parte de este. Al tratar de elaborar una lista completa de las oraciones en castellano, desde el principio nos encontramos con la dificultad de que las reglas de la gramática castellana no determinan precisamente la forma de las expresiones (conjuntos palabras) que deben ser consideradas como oraciones: una expresión en particular, como por ejemplo una exclamación, podrá funcionar como una oración en un contexto dado, mientras que una expresión de la misma forma no funcionará así en otro contexto. Además, el conjunto de todas las oraciones en castellano es, cuando menos, potencialmente infinito. Aunque es ciertamente verdadero que solo un número finito de oraciones ha sido formulado en el habla y en la escritura por los seres humanos hasta este momento, probablemente nadie podría estar de acuerdo en que la lista de todas estas oraciones comprende todas las oraciones en castellano. Por el contrario, es probable que al ver esta lista cada uno de nosotros pueda producir fácilmente una oración castellana que no está incluida en la lista. Finalmente, el hecho de que la palabra *'verdadero'* se dé en el castellano evita por sí misma la aplicación del procedimiento antes descrito.

De estas observaciones no podemos concluir que la definición deseada de verdad para oraciones arbitrarias en castellano no pueda obtenerse de otra manera, posiblemente empleando una idea diferente. Sin embargo, existe una razón más seria y fundamental que parece excluir esta posibilidad. Más aún, la mera suposición de que un adecuado empleo del término *'verdadero'* (en referencia a oraciones arbitrarias en castellano) ha sido asegurado por algún método, aparentemente nos conduce siempre a una contradicción. El argumento más simple que brinda esta contradicción se conoce como *antinomia del mentiroso* que se explicará en las siguientes líneas.

Considere la siguiente oración:

(6) *La oración impresa en rojo en la página 65 de la edición de junio de 1969 de* Scientific American *es falsa*[75].

Acordemos emplear **'s'** como la abreviación para esta oración. Tomando en cuenta la fecha de la revista y el número de la página, fácilmente podemos verificar que **'s'** es la única oración impresa en rojo en la página 65 de la edición de junio de 1969 de *Scientific American*. Por lo tanto se sigue en particular que:

(7) ***'s'*** *es falsa si y solo si la oración impresa en rojo en la página 65 de la edición de junio de 1969 de* Scientific American *es falsa.*

Por el otro lado, **'s'** es sin lugar a dudas una oración correctamente escrita. Por lo tanto asumiendo que nuestro empleo del término *'verdadero'* es adecuado, podemos afirmar la equivalencia (3) en donde **'p'** se reemplaza por **'s'**. Así pues podemos señalar:

(8) ***'s'*** *es verdadera si y sólo si* ***s***

Podemos ahora recordar que **'s'** está por toda la oración (6). Así pues, podemos reemplazar **'s'** por (6) en el lado derecho de (8) y obtendremos:

(9) ***'s'*** *es verdad si y solo si la oración impresa en rojo en la página 65 de la edición de junio de 1969 de la* Scientific American *es falsa.*

Ahora al comparar (7) y (9) podemos concluir:

(10) ***'s'*** *es falsa si y solo si* ***'s'*** *es verdadera*

Esto nos lleva a una obvia contradicción: **'s'** demuestra ser verdadera y falsa. Así pues nos enfrentamos a una antinomia. El enunciado de la antinomia del mentiroso se debe al lógico polaco Jan Lukasiewicz.

Algunos enunciados más relacionados con esta antinomia también son conocidos. Imaginemos por ejemplo, un libro de 100 páginas, con solo una oración impresa en cada página.

En la página 1 leemos:

La oración impresa en la página 2 de este libro es verdadera.

En la página 2 leemos:

La oración impresa en la página 3 de este libro es verdadera.

75 En la versión original esta oración está impresa en rojo (N. del T.).

Esto se repite hasta la página 99. Sin embargo, en la página 100, la última página de este libro encontramos:

La oración impresa en la página 1 de ese libro es falsa.

Asumamos que la oración impresa en la página 1 es realmente falsa. Mediante un argumento que no es complicado pero es muy largo y requiere hojear todo el libro, concluimos que nuestra suposición está equivocada. De igual manera asumimos ahora que la oración impresa en la página 1 es verdadera y mediante un argumento que es tan simple y largo como el original, nos convencemos que la nueva suposición también está equivocada. Así pues nuevamente nos enfrentamos a una antinomia.

Se convierte en un asunto muy sencillo el redactar muchos otros «libros antinómicos» que son variantes del que acabamos de describir. Cada página contiene solo una oración y en realidad una oración de la siguiente forma:

La oración impresa en la página 00 de este libro es XX.

En cada caso en particular 'XX' se reemplaza por una de las palabras 'verdadera' o 'falsa' mientras que '00' se reemplaza por uno de los numerales '1', '2', ..., '100'; los mismos numerales se darán en muchas páginas. No todas las variantes del libro original formadas de acuerdo a estas reglas producen en realidad una antinomia. El lector que gusta de los problemas lógicos difícilmente encontrará complicado el describir todas las variantes que comporta este trabajo. La siguiente advertencia podrá ser útil en este sentido. Imagínese que en alguna parte de este libro, digamos en la página 1, se dice que la oración de la página 3 es verdadera, mientras que en alguna otra página, digamos en la 2, se dice que la misma oración es falsa. A partir de esta información no se puede concluir que nuestro libro es «antinómico», solamente podemos sacar como conclusión que una de las oraciones de la página 1 o 2 debe ser falsa. Sin embargo, admitimos que surge una antinomia siempre que podemos mostrar que una de las oraciones del libro es al mismo tiempo verdadera y falsa, independientemente de cualquier suposición concerniente a la verdad o falsedad de las oraciones restantes.

La antinomia del mentiroso tiene un origen muy antiguo. Generalmente se atribuye al lógico griego Eubúlides; atormentó a muchos antiguos lógicos griegos y ocasionó la muerte prematura de cuando menos uno de ellos, Philetas de Cos. En la antigüedad se encontraron algunas otras antinomias y paradojas, así como en la Edad Media y en los tiempos modernos. Aunque muchas de ellas han sido completamente olvidadas, la antinomia del mentiroso aún se analiza y discute en los escritos contemporáneos. Junto con algunas antinomias recientemente descubiertas a fines del siglo (especialmente la antinomia de Russell), tienen un gran impacto en el desarrollo de la lógica moderna.

En la literatura sobre este tema se pueden encontrar dos enfoques diametralmente opuestos en cuanto a las antinomias. Un enfoque consiste en pasarlas por alto, para enfrentarlas como sofismas, como juegos que no son seriamente maliciosos y que tienen como fin principal mostrar la inteligencia del hombre que las formula. El enfoque opuesto es característico de algunos pensadores del siglo XIX y aún tiene presencia, o cuando menos hasta hace poco,

en algunas partes del mundo. De acuerdo con este enfoque las antinomias constituyen un elemento muy importante del pensamiento humano, deben aparecer una y otra vez en las actividades intelectuales y su presencia es la fuente básica del progreso real. Generalmente sucede que la verdad se encuentra en un punto intermedio. Personalmente, como lógico, no puedo reconciliarme con antinomias como un elemento permanente de nuestro sistema de conocimiento. Sin embargo, no soy el menos inclinado a dar poca importancia a las antinomias. El surgimiento de una antinomia es para mí un signo de enfermedad. Comenzando con premisas que parecen intuitivamente obvias, empleando formas de razonamiento que parecen intuitivamente ciertas, una antinomia nos lleva a un sin sentido, una contradicción. Siempre que esto sucede, tenemos que someter nuestras formas de pensamiento a una revisión, para rechazar algunas de las premisas en que creíamos o para mejorar algunas de las formas de argumentos que empleamos. Hacemos esto con la esperanza no solo de que la antigua antinomia sea dejada de lado sino que no surja otra. Con este fin probamos nuestros sistemas de pensamiento reformados mediante todos los medios posibles y primero que nada, tratamos de reconstruir la anterior antinomia en la nueva estructura; esta prueba es una actividad muy importante en el reino del pensamiento especulativo, parecido a llevar a cabo experimentos cruciales en la ciencia empírica.

Desde este punto de vista considere ahora específicamente la antinomia del mentiroso. La antinomia involucra el concepto de verdad en referencia a oraciones arbitrarias del castellano común; puede ser fácilmente reformulada para aplicarla a otros lenguajes naturales. Nos enfrentamos con un serio problema: ¿Cómo podemos evitar las contradicciones inducidas por esta antinomia? Una solución radical del problema que se nos ocurriría rápidamente consistiría en simplemente sacar la palabra '*verdadero*' del vocabulario castellano o cuando menos abstenerse de emplearla en discusiones serias.

Aquellas personas a quienes esta amputación del castellano les parezca muy poco apropiada e ilegítima podrán inclinarse a aceptar una solución algo más comprometedora que consistiría en adoptar lo que podría ser llamado (de acuerdo con el filósofo polaco contemporáneo Tadeuz Kotarbinski) «el enfoque nihilista de la teoría de la verdad». Según este enfoque, la palabra '*verdadero*' no tiene un significado independiente pero puede ser empleada como un componente de las dos significativas expresiones '*es verdad que*' y '*no es verdad que*'. Estas expresiones son tratadas como si fuesen palabras simples sin partes orgánicas. El significado que se les da es tal que pueden ser inmediatamente eliminadas de la oración en que se dan. Por ejemplo, en lugar de decir:

Es verdad que todos los gatos son negros.

Podríamos simplemente decir:

Todos los gatos son negros,

y en lugar de:

No es cierto que todos los gatos son negros

podríamos decir:

No todos los gatos son negros.

En otros contextos la palabra '*verdadero*' no tiene significado. Especialmente, no puede ser empleada como un predicado real que califique los nombres de las oraciones. Empleando la terminología de la lógica medieval, podemos decir que la palabra '*verdadero*' puede emplearse sincategoremáticamente en algunas situaciones especiales, pero no puede jamás emplearse categoremáticamente.

Para darse cuenta de las implicaciones de este enfoque considere la oración que fue el punto de partida para la antinomia del mentiroso; es decir la oración impresa en rojo en la página 65 de la revista antes mencionada[76]. Desde el punto de vista «*nihilista*» no es una oración con sentido y la antinomia simplemente desaparece. Desafortunadamente, muchos empleos de la palabra '*verdadero*' que de otra manera parecen legítimos y razonables, se ven igualmente afectados por este enfoque. Imagínese por ejemplo, que cierto término que se repite constantemente en los trabajos de un antiguo matemático admite muchas interpretaciones.

Un historiador de la ciencia que estudia los trabajos llega a la conclusión de que bajo una de estas interpretaciones todos los teoremas establecidos por el matemático demuestran ser verdaderos, esto naturalmente lo conduce a la conjetura de que lo mismo se aplicará a cualquier trabajo de este matemático que actualmente no se conoce pero que podrá ser descubierto en el futuro. No obstante, si el historiador de la ciencia comparte el enfoque «*nihilista*» sobre el concepto de verdad, no tendrá la posibilidad de expresar su conjetura en palabras. Se podría decir que el «*nihilismo*» teórico sobre la verdad hace un aparente servicio a algunas formas populares del lenguaje humano, mientras que en realidad extrae el concepto de verdad de la base conceptual de la mente humana.

Por tanto, buscaremos otra vía fuera de nuestro predicamento. Trataremos de encontrar una solución que mantenga el concepto clásico de verdad esencialmente intacto. El campo de aplicación del concepto de verdad tendrá que sufrir algunas restricciones, pero el concepto estará disponible cuando menos para el propósito del discurso ilustrado.

Para este fin, tenemos que analizar las características del lenguaje común que constituyen la fuente real de la antinomia del mentiroso. Al llevar a cabo dicho análisis, observamos inmediatamente un rasgo sorprendente de este lenguaje, su carácter totalmente amplio, universal. El lenguaje común es universal y su propósito es serlo. Su finalidad es proporcionar medios adecuados para expresar todo lo que pueda ser expresado en general, y en cualquier lenguaje; continuamente se está expandiendo para cumplir este requerimiento. En particular, es semánticamente universal en el sentido que se presenta a continuación. Junto con los objetos lingüísticos, tales como oraciones y términos, que son componentes de este lenguaje, también se incluyen nombres de estos objetos en el lenguaje (como sabemos, se pueden obtener nombres de expresiones colocando las expresiones entre comillas); además, el lenguaje contiene términos semánticos como '*verdad*', '*nombre*', '*designación*', que directa o indirectamente se refieren a la relación entre los objetos lingüísticos y lo que ellos expresan. Por consiguiente, para cada oración formulada en el lenguaje común, podemos formar en el mismo lenguaje otra oración para el efecto de que la primera sea verdadera o falsa. Empleando un '*truco*' adicional, inclusive podemos elaborar en el lenguaje lo que algunas veces se denomina oración

76 Se refiere a la p.65 de *Scientific American*, edición de junio de 1969 que contiene la versión original (N. del T.).

auto-referencial, es decir, una oración **O** que afirma el hecho de que O en sí es verdadera o que es falsa. En el caso de que **O** afirme su propia falsedad, podemos mostrar a través de un simple argumento que **O** es tanto verdadera como falsa y nuevamente nos enfrentamos con la antinomia del mentiroso.

Sin embargo, no se necesita emplear lenguajes universales en todas las situaciones posibles. Además, estos lenguajes en general no son necesarios para los propósitos de la ciencia (por ciencia me refiero a todo el reino de la investigación intelectual). En una rama en particular de la ciencia, por ejemplo de la química, uno discute ciertos objetos específicos, tales como elementos, moléculas y demás, pero no objetos lingüísticos tales como oraciones o términos. El lenguaje que está bien adaptado a esta discusión es uno restringido, con un vocabulario limitado; debe contener nombres de los objetos químicos, términos tales como *'elemento'* y *'molécula'*, pero no nombres de objetos lingüísticos; así pues no tiene que ser semánticamente universal. Esto mismo se aplica a la mayoría de las otras ramas de la ciencia. La situación se hace algo más confusa cuando regresamos a la lingüística. Esta es una ciencia a través de la cual nosotros estudiamos los lenguajes, así pues el lenguaje debe contar con nombres de objetos lingüísticos. Sin embargo, no tenemos que identificar el lenguaje de la lingüística con el lenguaje universal o cualquiera de los lenguajes que sean objetos de la discusión lingüística; y no estamos obligados a asumir que empleamos en lingüística un solo lenguaje para todas las discusiones. El lenguaje de la lingüística tiene que contener nombres de los componentes lingüísticos de los idiomas tratados pero no los nombres de sus propios componentes, así pues, no tiene por qué ser semánticamente universal. Esto mismo se aplica al lenguaje de la lógica o más bien a aquella parte de la lógica conocida como metalógica y metamatemática; en este caso nos interesan ciertos lenguajes, especialmente los lenguajes de las teorías lógicas y matemáticas (aunque tratamos estos lenguajes desde puntos de vista diferentes que en el caso de la lingüística).

En este punto surge la interrogante de si el concepto de verdad puede ser claramente definido y se puede establecer así un empleo consistente y adecuado de este concepto cuando menos para los lenguajes semánticamente restringidos del discurso de la ciencia. Bajo ciertas condiciones la respuesta a esta pregunta resulta ser afirmativa. Las principales condiciones impuestas al lenguaje son las de que todo su vocabulario debe estar disponible y debidamente precisadas sus reglas sintácticas concernientes a la construcción de oraciones y otras expresiones significativas a partir de las palabras enumeradas en el vocabulario. Además, las reglas sintácticas deben ser puramente formales, es decir, deben referirse exclusivamente a las formas (estructuras) de las expresiones; la función y el significado de una expresión debe depender exclusivamente de su forma. Especialmente, al examinar una expresión, uno debe ser capaz en todos los casos de decidir si la expresión es o no una oración. Jamás debe darse el caso de que una expresión funcione como una oración en un lugar mientras que una expresión de la misma forma no funcione así en otro lugar, o que una oración pueda afirmarse en un lugar mientras que una oración de la misma forma pueda negarse dentro de otro, por tanto, se sigue que los pronombres demostrativos y los adverbios tales como *'este'* y: *'aquí'* no deben aparecer en el vocabulario del lenguaje. Los lenguajes que cumplan con estas condiciones se denominan lenguajes formales. Cuando nos referimos a un lenguaje formal no es necesario distinguir entre las expresiones de la misma forma que han sido escritas o pronunciadas en diferentes lugares; por lo general uno habla de ellas como si fueran una y la misma expresión. El lector podrá haber notado que en algunas oportunidades empleamos esta forma de hablar

incluso al tratar un lenguaje natural, es decir, uno que no es formal; hacemos esto para una mayor simplicidad y solo en aquellos casos en que no se provoque una confusión.

Los lenguajes formales son completamente adecuados para la presentación de teorías lógicas y matemáticas; no encuentro ninguna razón importante por la que estos no puedan adaptarse para ser empleados en otras disciplinas científicas y, en particular, para el desarrollo de partes teóricas de las ciencias empíricas. Quisiera enfatizar que al emplear el término *'lenguajes formales'* no me refiero exclusivamente a los sistemas lingüísticos que están formulados enteramente mediante símbolos, y no tengo en mente nada básicamente opuesto a los lenguajes naturales. Por el contrario, los únicos lenguajes formales que son de interés son aquellos que son fragmentos de los lenguajes naturales (fragmentos provistos con vocabularios completos y reglas sintácticas precisas) o aquellos que puedan ser cuando menos adecuadamente traducidos a lenguajes naturales.

Existen algunas otras condiciones de las que depende la realización de nuestro programa. Debemos hacer una clara distinción entre el lenguaje que es el tema de nuestra discusión y para el que deseamos elaborar la definición de verdad, y el lenguaje en el que se debe formular la definición y cuyas implicaciones deben ser estudiadas. Al último se le denomina metalenguaje y al primero el lenguaje objeto. El metalenguaje debe ser lo suficientemente rico, especialmente, debe incluir al lenguaje objeto. De hecho, de acuerdo con nuestras estipulaciones, una adecuada definición de verdad implicará como consecuencias todas las definiciones parciales de este concepto, es decir, todas las equivalencias de la forma (3):

*'**p**' es verdadera si y solo si **p***

donde '**p**' debe reemplazarse (en ambos lados de la equivalencia) por una oración arbitraria del lenguaje objeto. Puesto que todas estas consecuencias están formuladas en el metalenguaje, concluimos diciendo que cada oración del lenguaje objeto deberá ser también una oración del metalenguaje, además, el metalenguaje debe contener nombres para las oraciones (y otras expresiones) del lenguaje-objeto puesto que estos nombres se dan en los lados izquierdos de las equivalencias que hemos presentado. También debe contener algunos términos adicionales que se necesitan para la discusión del lenguaje objeto, en realidad términos que denotan ciertos grupos especiales de expresiones, relaciones entre las expresiones y transformaciones en las expresiones; por ejemplo, debemos poder ser capaces de hablar del grupo de todas las oraciones o de la operación de yuxtaposición, mediante la cual, poniendo una o dos expresiones dadas una después de otra, formamos una nueva expresión. Finalmente, definiendo la verdad, demostramos que los términos semánticos (que expresan las relaciones entre las oraciones del lenguaje objeto y los objetos referidos por estas oraciones) pueden ser introducidos en el metalenguaje mediante las definiciones. Así pues concluimos que el metalenguaje que brinda suficientes medios para definir la verdad puede ser básicamente más rico que el lenguaje objeto; no puede coincidir con el lenguaje objeto ni ser traducible al último, desde que de otra manera ambos lenguajes pasarían a semánticamente universales y la antinomia del mentiroso podría ser reconstruida en ambos. Regresaremos a este asunto en la última sección de este artículo.

Si se cumplen todas las condiciones que acabamos de mencionar, la construcción de la deseada definición de verdad no presenta dificultades esenciales. Sin embargo, técnicamen-

te, es demasiado complicada para ser explicada aquí en detalle. Para cualquier oración del lenguaje objeto uno puede fácilmente formular la definición parcial correspondiente de la forma (3). No obstante, desde que el conjunto de todas las oraciones en el lenguaje-objeto es una regla infinita, mientras que cada oración del metalenguaje, es un conjunto finito de signos, no podemos llegar a definiciones generales, simplemente formando la conjunción lógica de todas las definiciones parciales. Sin embargo, lo que eventualmente obtenemos es en un sentido intuitivo equivalente a una conjunción infinita imaginaria. Hablando de una manera muy general, procedemos de la siguiente manera. En primer lugar, consideramos a las oraciones más simples, que no incluyen a otras oraciones como partes; para estas simples oraciones podemos definir la verdad directamente (empleando la misma idea que lleva a definiciones parciales). Luego, empleando las reglas sintácticas que se refieren a la formación de oraciones más complicadas a partir de oraciones simples, ampliamos la definición para oraciones compuestas arbitrariamente elegidas; aplicamos aquí el método llamado en matemáticas como definición por recurrencia. Esto es solo una aproximación al procedimiento real. Por algunas razones técnicas, el método de recurrencia se aplica generalmente para definir no el concepto de verdad, sino el concepto semántico de satisfacción. La verdad es pues fácilmente definida en términos de satisfacción.

En base a la definición construida de esta manera podemos desarrollar toda la teoría de verdad. Especialmente, podemos derivar de ella, además, las equivalencias de la forma 3) y algunas consecuencias de naturaleza general, tales como las famosas leyes de no contradicción y del tercio excluido. Mediante la primera de estas leyes, cuando hayan dos oraciones y una sea la negación de la otra, las dos no podrán ser verdaderas; mediante la segunda ley, las dos oraciones no podrán ser falsas.

La noción de prueba

Sea cual fuere el resultado de la construcción de una adecuada definición de verdad para el lenguaje científico, un hecho parece seguro: la definición no incluye un criterio operativo para decidir si las oraciones en particular de este lenguaje son verdaderas o falsas (y además no está diseñado con este propósito). Consideramos por ejemplo una oración en el lenguaje de la geometría elemental de una escuela secundaria, por ejemplo 'Los tres bisectores de cada triángulo se encuentran en un punto'. Si estuviésemos interesados en el asunto de si una oración es verdadera y regresamos a la definición de verdad para una respuesta, sufriremos una decepción. La única información que obtenemos es que la oración es verdadera si los bisectores de un triángulo siempre se encuentran en un punto y es falsa si no siempre lo hacen; pero solo una investigación geométrica nos permitirá decidir cuál es realmente el caso. Observaciones análogas se aplican a oraciones del campo de cualquier otra ciencia en particular: el decidir si una oración de este tipo es o no verdadera es una tarea de la ciencia misma y no de la lógica ni de la teoría de la verdad.

Algunos filósofos y metodólogos de la ciencia tienden a rechazar toda definición que no proporcione un criterio para determinar si cualquier objeto específico está comprendido en el concepto definido o no. En la metodología de las ciencias empíricas, dicha tendencia está representada por la doctrina del operacionalismo; los filósofos y matemáticos que pertenecen a la escuela constructivista parecen mostrar una tendencia similar. No obstante, en ambos casos, la gente que mantiene esta opinión aparentemente representa una pequeña minoría. Difícilmente se ha realizado alguna vez un

firme intento para llevar a la práctica este programa (es decir, desarrollar una ciencia sin emplear definiciones no deseables). Parece evidente que con este programa, muchos de los matemáticos contemporáneos podrían desaparecer y las partes teóricas de la física, química, biología y otras ciencias empíricas serían seriamente mutiladas. Las definiciones de conceptos como átomo o gen así como la mayoría de definiciones en matemáticas no tienen ningún criterio para determinar si un objeto está comprendido en el término que ha sido definido.

Puesto que la definición de verdad no nos brinda ningún criterio y al mismo tiempo se considera correctamente la búsqueda de la verdad como la esencia de las actividades científicas, surge, como problema importante, el encontrar cuando menos criterios parciales de verdad y desarrollar procedimientos que nos permitan afirmar o negar la verdad (o cuando menos la probabilidad de verdad) de cuantas oraciones sea posible. En realidad, tales procedimientos son conocidos, algunos se emplean exclusivamente en la ciencia empírica y otros principalmente en la ciencia deductiva. El concepto de prueba —el segundo concepto que tratamos en este artículo— se refiere solamente al procedimiento de afirmar la verdad de las oraciones, el cual se emplea principalmente en la ciencia deductiva. *Este procedimiento es un elemento esencial de lo que se conoce como el método axiomático, el único método que se emplea actualmente para desarrollar las disciplinas matemáticas.*

El método axiomático y el concepto de prueba dentro de este contexto son productos de un extenso desarrollo histórico. Probablemente, sea esencial cierto conocimiento preliminar de este desarrollo para la comprensión del concepto contemporáneo de prueba.

Originalmente, una disciplina matemática era un conjunto de oraciones que se relacionaba con cierta clase de objetos o fenómenos, que era formulado mediante cierto conjunto de términos y aceptado como verdadero. Este conjunto de oraciones no tenía ningún orden estructural. Una oración era aceptada como verdadera porque parecía intuitivamente evidente, o además porque se comprobaba en base a algunas oraciones intuitivamente evidentes, y así quedaba demostrada mediante un argumento intuitivamente cierto, que era una consecuencia de estas otras oraciones. El criterio de la evidencia intuitiva (y certeza intuitiva de los argumentos) fue aplicado sin restricción alguna; toda oración reconocida como verdadera mediante este criterio, era incluida automáticamente en la disciplina. Esta descripción parece adecuarse, por ejemplo, a la ciencia de la geometría, como la conocían los antiguos egipcios y griegos al principio de la etapa pre-euclidiana.

No obstante, pronto se observó que el criterio de la evidencia intuitiva está lejos de ser infalible, no tiene carácter objetivo y a menudo conduce a serios errores. El subsecuente desarrollo, en conjunto, del método axiomático puede ser considerado como una expresión de la tendencia a restringir el recurso a la evidencia intuitiva. Esta tendencia primero se reveló a sí misma en el esfuerzo por comprobar tantas oraciones como fuera posible y, por consiguiente, restringir al máximo el número de oraciones aceptadas como verdaderas, simplemente en base a la evidencia intuitiva. Lo ideal, desde este punto de vista, sería comprobar cada oración que sea aceptada como verdadera. Por razones obvias, este ideal no puede alcanzarse. En realidad, comprobamos cada oración en base a otras oraciones, comprobamos estas otras oraciones en base a algunas otras, y así sucesivamente: si tenemos que evitar tanto un círculo vicioso como una regresión infinita, el procedimiento debe ser detenido en algún momento. Como un compromiso entre ese ideal inalcanzable y las posibilidades realizables, surgieron dos principios que consecuentemente fueron aplicados en la elaboración de disciplinas matemáticas. Por el primero de estos principios,

cada disciplina comienza con una pequeña lista de oraciones, denominadas axiomas u oraciones primitivas, que parecen ser intuitivamente evidentes y que son reconocidas como verdaderas sin ninguna otra justificación. De acuerdo con el segundo principio, ninguna otra oración es aceptada como verdadera en la disciplina a menos que seamos capaces de probarla solamente con la ayuda de axiomas y de oraciones que hayan sido previamente probadas desde los axiomas. Todas las oraciones que puedan ser reconocidas como verdaderas en virtud de estos dos principios se denominan teoremas u oraciones demostrables de la disciplina dada. Dos principios análogos se refieren al uso de términos para construir una disciplina. Por el primero de ellos enumeramos unos cuantos términos al principio, denominados términos no-definidos o primitivos, que parecen ser comprensibles de una manera directa y los cuales decidimos emplear (al formular y demostrar teoremas) sin explicar sus significados; por el segundo principio, acordamos no emplear ningún otro término a menos que seamos capaces de explicar su significado definiéndolo con la ayuda de términos no-definidos y términos previamente definidos. Estos cuatro principios constituyen las piedras angulares del método axiomático, las teorías desarrolladas de acuerdo con estos principios se denominan teorías axiomáticas.

Según se sabe, el método axiomático fue aplicado al desarrollo de la geometría en los *Elementos* de Euclides, aproximadamente en el año 300 A.C. De ahí en adelante fue empleado por más de 2 000 años prácticamente sin haber sufrido cambios en sus principales principios (los cuales no fueron formulados explícitamente durante un largo periodo) ni en el enfoque general del tema. Sin embargo, en los siglos XIX y XX, el concepto del método axiomático sufrió una profunda evolución. Las características de la evolución que se relacionan con el concepto de prueba son especialmente importantes para nuestra discusión.

Hasta los últimos años del siglo XIX, el concepto de prueba era principalmente de carácter psicológico. Una prueba era una actividad intelectual que tenía como finalidad convencer a uno mismo y a los demás de la veracidad de una oración tratada; de una manera más específica, para desarrollar una teoría matemática se empleaban pruebas tanto para convencernos como para convencer a los demás de que una oración analizada tenía que ser aceptada como verdadera después que otras oraciones habían sido previamente aceptadas como tales. No se pusieron restricciones en los argumentos empleados en las pruebas, excepto que tenían que ser intuitivamente convincentes. No obstante, en un determinado momento surgió la necesidad de someter el concepto de prueba a un análisis más profundo que daría como resultado la restricción del recurso a una evidencia intuitiva, también en este contexto. Probablemente esto estaba relacionado con algunos avances específicos en matemáticas, en particular con el descubrimiento de las geometrías no-euclidianas. El análisis era llevado a cabo por lógicos, comenzando con el lógico alemán Gottlob Frege; esto condujo a la introducción de un nuevo concepto, el de *la prueba formal*, que se convirtió en el sustituto adecuado y significó un avance importante sobre el antiguo concepto psicológico.

El primer paso para construir una teoría matemática aplicando el concepto de prueba formal es la formalización del lenguaje de la teoría, en el sentido que hemos tratado anteriormente en relación con la definición de verdad. Así pues se dan las reglas sintácticas formales que en particular nos permiten con tan solo observar las formas de las expresiones, distinguir una oración de una expresión que no es oración. El paso siguiente consiste en formular unas pocas reglas de una naturaleza diferente, las llamadas reglas de prueba (o de inferencia). Mediante estas reglas se considera que una oración es derivable directamente desde oraciones dadas, si, hablando de una manera general, su forma se relaciona de una

manera prescrita con las formas de tales oraciones dadas. Son pocas las reglas de prueba y su contenido es simple. Al igual que las reglas sintácticas, tienen un carácter formal, es decir, se refieren exclusivamente a las formas de las oraciones relacionadas. Intuitivamente, todas las reglas de derivación parecen ser infalibles, en el sentido de que una oración que se deriva directamente de oraciones verdaderas por cualquiera de estas reglas debe ser verdadera en sí misma. En realidad la infalibilidad de las reglas de prueba puede ser establecida en base a una definición adecuada de 'verdad'. El ejemplo más conocido y más importante de una regla de prueba es la regla de separación conocida también como *Modus ponens*. Mediante esta regla (que en algunas teorías sirve como única regla de prueba) se puede derivar directamente una oración 'q' de dos oraciones dadas si una de ellas es la oración condicional *'si p, entonces q'* y la otra es 'p'; aquí 'p' y 'q' son, como siempre, abreviaciones de dos oraciones de nuestro lenguaje formalizado. Ahora podemos explicar en qué consiste una prueba formal de una oración dada. Primero aplicamos las reglas de prueba a los axiomas y obtenemos nuevas oraciones que pueden derivarse directamente de axiomas; luego, aplicamos las mismas reglas a las nuevas oraciones, o a las nuevas oraciones y axiomas en conjunto, y obtenemos otras oraciones; y continuamos este proceso. Si después de un número finito de pasos llegamos a una oración dada, decimos que la oración ha sido formalmente probada. Esto también puede ser expresado de una manera más precisa: una prueba formal de una oración dada consiste en construir una secuencia finita de oraciones de tal manera que; 1) la primera oración en la secuencia es un axioma; 2) cada una de las siguientes oraciones es una axioma o es directamente derivable de algunas de las oraciones que la preceden en la secuencia, en virtud de alguna de las reglas de prueba; y 3) la última oración de la secuencia es la oración que debe ser probada. Cambiando un poco el empleo de *'prueba'*, podemos decir inclusive que una prueba formal de una oración es simplemente cualquier secuencia finita de oraciones con las tres propiedades antes enumeradas.

La teoría axiomática cuyo lenguaje ha sido formalizado y para la que se ha definido al concepto de prueba formal, se denomina teoría formalizada. Indicamos que las únicas pruebas que pueden ser empleadas en una teoría formalizada son las pruebas formales; ninguna oración podrá ser aceptada como teorema a menos que aparezca en la lista de axiomas o que se pueda encontrar una prueba formal para ella. En principio, el método para presentar una teoría formalizada en cada etapa de su desarrollo es muy elemental. Primero enumeramos los axiomas y luego todos los teoremas conocidos. Ordenados de tal manera que toda oración de la lista que nos sea un axioma pueda ser reconocida directamente como teorema, simplemente comparando su forma con las formas de las oraciones que la preceden en la lista; aquí no se presentan procesos complejos de razonamiento ni de convencimiento, no hablo de los procesos psicológicos a través de los cuales los teoremas han sido descubiertos realmente. El recurso a la evidencia intuitiva, de hecho, ha sido considerablemente restringido; no se han eliminado completamente las dudas concernientes a la veracidad de los teoremas, pero se las ha reducido a las posibles dudas sobre la verdad de las pocas oraciones enumeradas como axiomas y sobre la infalibilidad de las pocas reglas simples de prueba. Cabe añadir que el proceso para introducir nuevos términos en el lenguaje de una teoría también puede ser formalizado aplicando reglas formales especiales de definición.

Se sabe que todas las disciplinas matemáticas existentes pueden ser presentadas como teorías formalizadas. Las pruebas formales pueden ser proporcionadas para teoremas matemáticos más profundos y más complicados, que originalmente fueron establecidos mediante argumentos intuitivos.

Relación entre verdad y prueba

Indudablemente fue un gran logro de la lógica moderna el reemplazar al antiguo concepto psicológico de prueba que difícilmente habría podido ser claro y preciso, por un simple nuevo concepto de carácter puramente formal. Pero el triunfo del método formal incluía el germen de un retraso futuro. Tal como veremos, la misma simplicidad del nuevo concepto se convirtió en su talón de Aquiles.

Para evaluar el concepto de prueba formal tenemos que aclarar su relación con el concepto de verdad. Después de todo, la prueba formal, al igual que la antigua prueba intuitiva es un procedimiento que tiene como fin la obtención de nuevas oraciones verdaderas. Este procedimiento resultará adecuado solo si todas las oraciones obtenidas con su ayuda demuestran ser verdaderas y todas las oraciones verdaderas pueden ser obtenidas con su ayuda. Por tanto, el problema surge naturalmente: ¿Es la prueba formal realmente un procedimiento adecuado para obtener la verdad? En otras palabras: ¿El conjunto de todas las oraciones deducibles formalmente coincide con el conjunto de todas las oraciones verdaderas?

A fin de ganar simplicidad, referimos este problema a uno particular, a las matemáticas básicas, es decir, a la aritmética de los números naturales (la teoría elemental de números). Asumimos que esta disciplina ha sido presentada como una teoría formalizada. El vocabulario de la teoría es escaso. Consiste en realidad, de variables tales como '**m**', '**n**' '**p**' ... que representan números naturales arbitrarios de numerales '**0**', '**1**', '**2**' .... que representan números particulares; de símbolos que muestran algunas relaciones usuales entre los números y operaciones con los números tales como '=', ' . ', '+' , '–' ; y finalmente, algunos términos lógicos, nominalmente, conectivos oracionales (**'y'**, **'o'**, **'si ..., entonces ...'**, **'no'**) y cuantificadores (expresiones de la forma '*para cada número* ***m***' y '*para algún número* ***m***'). Las reglas sintácticas y las reglas de prueba son simples. Al hablar de oraciones en la discusión que presentamos a continuación, tenemos siempre en mente las oraciones del lenguaje formalizado de la aritmética.

Sabemos, a partir de la discusión sobre la verdad en la primera sección, que, tomando dicho lenguaje como el lenguaje-objeto, podemos elaborar un metalenguaje apropiado y formular en él una adecuada definición de verdad. En este contexto resulta conveniente decir que así hemos definido el conjunto de las oraciones verdaderas; en efecto, la definición de verdad señala que una cierta condición formulada en el metalenguaje es satisfecha por todos los elementos de este conjunto (es decir, todas las oraciones verdaderas) y solo por estos elementos. Con más facilidad podemos definir en el metalenguaje el conjunto de oraciones demostrables; la definición está completamente de acuerdo con la explicación del concepto de prueba formal que fue dado en la segunda sección. Estrictamente hablando, las definiciones tanto de verdad como de demostrabilidad pertenecen a una nueva teoría formulada en el metalenguaje y están específicamente diseñadas para el estudio de nuestra aritmética formalizada y su lenguaje. La nueva teoría es llamada metateoría o, más específicamente, la meta-aritmética. No profundizaremos aquí en la manera como se construye la metateoría, sus axiomas, términos no-definidos y otros. Solo señalamos que es dentro del marco de esta metateoría que formulamos y resolvemos el problema de si el conjunto de oraciones demostrables coincide o no con el de las oraciones verdaderas.

La solución al problema demuestra ser negativa. En este punto debemos hacer una muy rápida descripción del método mediante el cual se ha llegado a la solución. La principal idea está muy relacionada con aquella empleada por el lógico norteamericano contemporáneo (de origen austriaco) Kurt Gödel en su famoso artículo sobre la incompletitud de la aritmética.

En la primera sección se señaló que el metalenguaje que nos permite definir y discutir el concepto de verdad debe ser rico. Debe contener todo el lenguaje objeto como una parte y por tanto podemos hablar en él de números naturales, conjuntos de números, relaciones entre los números y demás; pero también contiene los términos necesarios para la discusión del lenguaje-objeto y sus componentes, por lo tanto podemos hablar en el metalenguaje de las expresiones y en particular de las oraciones, de conjuntos de oraciones, relaciones entre las oraciones y demás. Así pues en la metateoría podemos estudiar las propiedades de estos diferentes tipos de objetos y establecer las conexiones entre ellos.

En particular, empleando la descripción de las oraciones proporcionadas por las reglas sintácticas del lenguaje-objeto, es fácil ordenar todas las oraciones (de las más simples a las más complejas) en una secuencia infinita y enumerarlas consecutivamente. Así pues nosotros correlacionamos a cada oración con un número natural de tal manera que los números correlacionados con dos diferentes oraciones son siempre diferentes; en otras palabras, establecemos una correspondencia uno a uno entre las oraciones y los números. Esto a su vez nos lleva a una correspondencia similar entre los conjuntos de oraciones y los conjuntos de números, o relaciones entre las oraciones o entre los números. En particular, podemos considerar los números de las oraciones demostrables y los números de las oraciones verdaderas; en breve, los llamamos números demostrables y números verdaderos. Nuestro principal problema se reduce entonces a la pregunta: ¿son el conjunto de números demostrables y el conjunto de números verdaderos idénticos?

Para responder a esta pregunta negativamente, basta de hecho, indicar una propiedad simple que se aplique a un conjunto pero no al otro. La propiedad que mostraremos realmente es bastante inesperada, un tipo de *deux ex machina*.

La simplicidad intrínseca de los conceptos de prueba formal y demostrabilidad formal tendrá un papel básico aquí. En la segunda sección hemos visto que el significado de estos conceptos se explica básicamente en términos de ciertas relaciones simples entre oraciones, prescritas por unas pocas reglas de prueba; aquí el lector podrá recordar la regla del *Modus ponens*. Las correspondientes relaciones entre los números de las oraciones son igualmente simples. Resulta que pueden ser descritas mediante las operaciones y relaciones aritméticas más simples tales como la suma, multiplicación —e igualdad— así en términos que se dan en nuestra teoría aritmética. Como una consecuencia, el conjunto de los números demostrables también puede ser representado en tales términos. Uno puede describir brevemente lo que se ha logrado diciendo que la definición de demostratividad ha sido traducida del metalenguaje al lenguaje-objeto.

Por otra parte, la discusión del concepto de verdad en los lenguajes naturales sugiere la conjetura de que no se puede obtener esta traducción para la definición de verdad; de otra manera el lenguaje-objeto sería en un sentido semánticamente universal y sería inminente la aparición de la antinomía del mentiroso. Confirmamos esta conjetura mostrando que, si

el conjunto de números verdaderos pudiera ser definido en el lenguaje de la aritmética, la antinomia del mentiroso podría ser realmente reconstruida en este lenguaje. Sin embargo estamos trabajando con un lenguaje formalizado y restringido, la antinomía tendría una forma más complicada y sofisticada. En particular, ninguna expresión con un contenido empírico tal como *'La oración impresa en tal o cual lugar'*, que jugaba un importante papel en la formulación original de la antinomia, se daría en la nueva formulación. No debemos ahondar más en este punto por un momento.

Así pues el conjunto de números demostrables no coincide con el conjunto de números verdaderos, puesto que el primero se puede definir en el lenguaje de la aritmética mientras que el segundo no. Por tanto, los conjuntos de oraciones demostrables y de oraciones verdaderas no coinciden tampoco. Por otro lado, empleando la definición de verdad fácilmente demostramos que todos los axiomas de la aritmética son verdaderos y las reglas de prueba infalibles. Así pues todas las oraciones demostrables son verdaderas; por lo tanto la afirmación recíproca no se cumple. Así nuestra conclusión final es: existen oraciones formuladas en el lenguaje de la aritmética que son verdaderas pero que no pueden ser demostradas en base a los axiomas y reglas de prueba aceptados en la aritmética.

Uno podría pensar que la conclusión básicamente depende de axiomas y reglas de inferencia específicas, escogidas para nuestra teoría aritmética y que el resultado final de la discusión podría ser diferente si enriquecemos apropiadamente la teoría aumentando nuevos axiomas o nuevas reglas de inferencia. Sin embargo, un análisis más profundo muestra que el argumento depende muy poco de las propiedades específicas de la teoría tratada y que este realmente se extiende a la mayoría de las otras teorías formalizadas. Asumiendo que una teoría incluye la aritmética de los números naturales como parte (o que, cuando menos, la aritmética puede reconstruirse en ella) podemos repetir la parte esencial de nuestro argumento en una forma prácticamente inmodificable; así podemos concluir que el conjunto de oraciones demostrables de la teoría es diferente al conjunto de las oraciones verdaderas. Si además podemos demostrar (como es frecuentemente el caso) que todos los axiomas de la teoría son verdaderos y que todas las reglas de inferencia son infalibles, podremos concluir señalando que hay oraciones verdaderas de la teoría que no son demostrables. Aparte de algunas teorías fragmentarias con restringidos medios de expresión, generalmente se cumple nuestra tesis concerniente a la relación de la teoría con la aritmética de los números naturales, y así pues nuestras conclusiones tienen un carácter casi universal. En lo que se refiere a las teorías fragmentarias que no incluyen la aritmética de los números naturales, sus lenguajes no contarán con suficientes medios para definir el concepto de demostratividad y sus oraciones demostrables podrán en realidad coincidir con sus oraciones verdaderas. La geometría elemental y el álgebra elemental de los números reales son los más conocidos ejemplos y son tal vez las más importantes de las teorías en que estos conceptos coinciden.

El dominante papel cumplido en todo el argumento por la antinomia del mentiroso aclara algunas de las observaciones referentes al rol de las antinomias en la historia del pensamiento humano. La antinomia del mentiroso apareció por primera vez en nuestra discusión como un tipo de fuerza endemoniada con un gran poder destructivo. Nos obligó a abandonar cualquier intento para aclarar el concepto de verdad para los lenguajes naturales. Tenemos que limitar nuestras miras a lenguajes formalizados del discurso científico. Como una protección contra la posible reaparición de la antinomia, tuvimos que complicar

considerablemente la discusión distinguiendo entre un lenguaje y su metalenguaje. Sin embargo, además en el nuevo y restringido ordenamiento, hemos logrado controlar la energía destructiva y emplearla para propósitos pacíficos y constructivos. La antinomia no ha reaparecido pero su idea básica ha sido empleada para establecer un significativo resultado metalógico con implicaciones de largo alcance.

El significado de este resultado no disminuye por el hecho de que sus implicancias filosóficas son esencialmente de carácter negativo. El resultado muestra, en verdad, que en ninguna parte de la matemática el concepto de demostratividad es un perfecto sustituto para el concepto de verdad. La creencia de que la prueba formal puede servir como un adecuado instrumento para establecer la verdad de todos los enunciados matemáticos ha probado ser infundada. El triunfo original de los métodos formales ha sido seguido por un serio retroceso.

Sea lo que se diga para terminar esta discusión, está destinado a ser un anticlímax. El concepto de verdad para las teorías formalizadas puede ser ahora introducido por medio de una definición precisa y adecuada. Por tanto, ella puede ser empleada sin ninguna restricción o reserva en las discusiones metalógicas. Realmente se ha convertido en un concepto metalógico básico incluido en importantes problemas y resultados. Por otro lado, el concepto de prueba tampoco ha perdido su importancia. La prueba es aún el único método empleado para asegurar la verdad de las oraciones dentro de cualquier teoría matemática específica. Sin embargo, nosotros ahora somos conscientes del hecho de que hay oraciones formuladas en el lenguaje de la teoría las cuales son verdaderas pero no demostrables, y no podemos descontar la posibilidad de que algunas de estas oraciones se den entre aquellas que nos interesan y tratamos de demostrar. Así pues en algunas situaciones desearíamos explorar la posibilidad de ampliar el conjunto de oraciones demostrables. Con este fin enriquecemos la teoría dada incluyendo nuevas oraciones en su sistema de axiomas o brindándole nuevas reglas de prueba. Al hacer esto, empleamos el concepto de verdad como un guía; puesto que no deseamos añadir un nuevo axioma o una nueva regla de prueba si tenemos razones para creer que el nuevo axioma no es una oración verdadera, o que la nueva regla de prueba al aplicarse a las oraciones verdaderas podrá producir una oración falsa. El proceso de expandir una teoría podrá de hecho repetirse arbitrariamente muchas veces. El concepto de oración verdadera funciona pues como un límite ideal que nunca puede ser alcanzado pero al que tratamos de acercarnos aumentando gradualmente el conjunto de oraciones demostrables. Parece probable, aunque por diferentes razones, que el concepto de verdad juega un rol análogo en el reino del conocimiento empírico. No existe ningún conflicto entre los conceptos de verdad y prueba en el desarrollo de las matemáticas; los dos conceptos no están en conflicto sino que viven en una coexistencia pacífica.

El uso decreciente del concepto de verdad en la epistemología contemporánea

I. Introducción

El artículo que publicamos a continuación está constituido por el texto de la conferencia expuesta, por el autor, en el VII Congreso Nacional de Filosofía que tuvo lugar en agosto de 1998 en el campus de la Universidad Católica del Perú. El sentido del planteamiento que formulamos es eminentemente epistemológico. Recoge las tesis y los argumentos que hacen inteligible que a fines del presente siglo se configure con toda claridad, como un hecho, la cautela mostrada por los filósofos de la ciencia y por los más prominentes científicos para calificar a una teoría de verdadera o de falsa, lo que contrasta con una larga tradición filosófica iniciada por Aristóteles y continuada en nuestro siglo particularmente por el Wittgenstein del *Tractatus Logico Philosophicus*, quien sostuvo la tesis de que las proposiciones significativas son simplemente verdaderas o falsas en armonía con la vieja definición aristotélica del principio lógico del tercio excluido.

La cautela, antes descrita, implica un alejamiento respecto de la tesis clásica que entendió la verdad en términos de una correspondencia entre lo que se dice y lo que ocurre. Esto a su vez entraña un debilitamiento del ideal de objetividad que tradicionalmente ha sido considerado una de las justificaciones más fuertes de la investigación científica. En breve, la orientación filosófica antes mencionada conduce al cuestionamiento y, eventualmente, al abandono de la creencia de que las proposiciones científicas describen la realidad. Aunque parezca sorprendente, un cosmólogo como Stephen Hawking, considerado como el físico más importante del siglo XX después de Albert Einstein, al presentar su libro *La naturaleza del espacio y el tiempo* (1996, Ed. Debate, Madrid, p. 12), afirma: «Yo adopto el punto de vista positivista según el cual una teoría física es solamente un modelo matemático y no tiene sentido preguntar si se corresponde o no con la realidad», lo que claramente expresa que para este investigador, que ocupa la cátedra Isaac Newton en la Universidad de Cambridge, han perdido sentido y vigencia la definición del concepto de verdad de Aristóteles y los ideales epistemológicos que ella generó. Esta situación es todavía más sorprendente si observamos el hecho de que la tesis de que la verdad consiste en una correspondencia entre conocimiento y realidad ha sido internalizada por el pensamiento filosófico denominado occidental, durante más de veinte siglos, convirtiéndose en una especie de segunda naturaleza que orienta nuestros procesos cognoscitivos y de transferencia de conocimientos.

El artículo pretende describir de manera sucinta la evolución de las tesis y los argumentos que han dado lugar a que puntos de vista como los del primer Wittgenstein hayan devenido en posiciones filosóficas sobre la ciencia como la de Hawking, que no otorgan lugar significativo alguno al uso del concepto de verdad en la evaluación del conocimiento. También se encuentran reseñadas diversas propuestas para cubrir el espacio que dejaría el concepto de verdad como consecuencia del proceso antes descrito. Sin embargo, dicho

concepto no solamente ha cumplido la función de ser un adjetivo para evaluar positivamente el conocimiento científico, sino que tradicionalmente se lo ha utilizado también como un valor ético que orienta la acción humana. En este segundo sentido se lo ha empleado como un principio regulativo para darle direccionalidad a la actividad científica, estableciéndose como un deber moral de los investigadores la obligación de decir la verdad, toda la verdad y nada más que la verdad.

Este segundo aspecto es el que posee especial relevancia en el campo de la educación, en la medida que uno de los grandes objetivos de la enseñanza en todos sus niveles es orientar e invitar a los educandos a la búsqueda honesta de la verdad. Tal pretensión se torna especialmente discutible si los desarrollos del análisis riguroso de la ciencia nos llevan a la plausibilidad de la tesis que sostendría que no tiene sentido buscar la verdad en la medida que ella no puede ser establecida, lo que trastornaría severamente uno de los objetivos tradicionales de la acción humana.

En esta introducción, no discutiremos con detalle las posibles salidas rigurosas al conflicto entre el uso epistemológico y el uso moral del concepto de verdad. Es suficiente sostener que aun en el caso de que la verdad no pudiera ser establecida de manera concluyente mediante la investigación científico-empírica, cabe postularla como un valor o como una idea regulativa de la praxis, que puede orientar nuestra acción a manera de un ideal inalcanzable, pero al que nos podemos aproximar tanto como el rigor de nuestro análisis y la potencia de nuestros instrumentos nos lo permitan.

Es por ello que el sentido de nuestra ponencia no es en modo alguno cuestionar el uso del concepto de verdad para expresar fines cognoscitivos y éticos en el campo de la educación, sino contribuir a crear una conciencia alerta respecto de los riesgos que se derivan de una aceptación poco crítica del realismo de cepa aristotélica, aún vigente fuera del ámbito de la epistemología, que a la luz de análisis contemporáneo peca, claramente, de ingenuo o, en otros casos, de dogmático.

La creencia de que conocemos la realidad directamente tal y como es no solo carece de sustento razonable, sino que, además, conlleva el riesgo de dogmatismo y de autoritarismo, actitudes que son incompatibles con el sentido crítico, la flexibilidad y la tolerancia que deben acompañar a todo proceso educativo. En efecto, la convicción de que conocemos la realidad tal y cual es nos induce a soslayar el hecho de que en todos los casos, aquello que llamamos realidad es solamente nuestra imagen de ella, la cual por las limitaciones propias de nuestra condición humana siempre está sujeta a perturbaciones e inexactitudes.

El obviar el hecho de que nuestro conocimiento de la realidad está mediado y condicionado por las características y peculiaridades de los esquemas mentales que instala en nuestro cerebro la cultura y por las propiedades físicas, químicas y electromagnéticas de nuestro sistema sensorial puede dar lugar a que tengamos la convicción de que la realidad es estrictamente de la manera como nos la representamos y a que no admitamos, rígidamente, que en los hechos existen imágenes alternativas a eso que llamamos realidad y a que aunque podamos elegir con argumentos aceptables la mejor de ellas, obviemos el que esta siempre será perfectible, modificable, reformulable en su totalidad o, simplemente, desechable. Consecuentemente, el análisis epistemológico contemporáneo conduce, como implicancia de

relevancia educacional, a la recomendación de que la mejor manera de formar estudiantes realistas es mostrarles que la convicción tradicional que nos asegura que conocemos sin limitaciones que lo que es, es, es una especie de fábula que después de cumplir su función histórica se ha convertido, en medida significativa, en un factor perturbador para lograr niveles cada vez más profundos y ricos en el conocimiento humano. Orientar y contribuir a crear lucidez sobre la situación descrita constituye la justificación de que publiquemos el texto que sigue en la sección segunda en una revista destinada principalmente a educadores. De este modo nos proponemos orientar una enseñanza de la ciencia que considere las sugerencias que inmediatamente formulamos.

La ciencia se debe enseñar en términos de la propuesta más razonable que se puede formular, en un momento determinado, en base a que se satisface de manera significativa los criterios de objetividad, de simplicidad, de capacidad predictiva o retrodictiva. En ningún caso debe enseñarse como si se tratara de un conjunto de soluciones incuestionables a problemas definitivamente cerrados.

La información científica debe ser como un medio para entrenar a la mente en un estilo de pensar flexible, analítico, lógicamente riguroso y creador, el cual debe ser permanentemente sometido al desafío que entraña la solución de problemas relevantes.

La enseñanza debe estar dirigida más a la formación de poderes que a la adquisición de saberes. Debe entrenar al estudiante en el manejo de instrumentos conceptuales, más que informarlo mecánicamente de resultados. Dentro de este contexto ocupa un lugar decisivo el análisis del lenguaje científico y el análisis lógico de los razonamientos y argumentos presupuestos en las pruebas científicas. En efecto, como sostenía Wittgenstein, para hablar claramente hay que pensar claramente.

La formación de una mentalidad científica puede ser muy significativamente estimulada por una adecuada y oportuna formación en epistemología, la que no debe ser entendida como un relato sino como un entrenamiento en el manejo de conceptos científicos, en la postulación de hipótesis, en la construcción de pruebas lógicamente articuladas y en la identificación de deficiencias sintácticas y semánticas. Una mente así entrenada es racionalmente sensible a los matices indicadores de distintos niveles de abstracción y a las implicancias del argumento y del contra-argumento.

La condición necesaria más relevante de la enseñanza universitaria es la adecuada formación especializada del profesor. El manejo de técnicas didácticas solo es de ayuda cuando el profesor posee previamente una sólida formación especializada. En ausencia de ella, el recurso didáctico carece de sentido, pues no existe procedimiento razonable alguno para enseñar lo que no se sabe. De esto se deduce que los estudios de posgrado en didáctica de la educación superior deberían estar reservados solo a aquellos que poseen un diploma universitario que los acredite como especialistas en un determinado campo del conocimiento. En breve, dentro de este contexto, solo a quienes poseen el *saber qué*, se los puede dotar del *saber cómo*.

II. Argumentación

1. Esta disertación examina las variaciones que se han ido produciendo, durante el siglo XX, en la calificación que han hecho los filósofos usando la dicotomía verdadero-falso, de lo que genéricamente se denomina afirmaciones científicas. Estas afirmaciones, dentro del contexto del presente trabajo, están constituidas por enunciados o proposiciones que conforman un conjunto más o menos difuso, dentro del cual privilegiaremos el análisis de las llamadas leyes científicas organizadas, axiomáticamente o no, en teorías.

2. Es sostenible que en la primera mitad de nuestro siglo ha existido un uso aceptado del concepto de verdad en los escritos de, por ejemplo, Frege, Russell y Wittgenstein, el mismo que se expresa en los conceptos de función predicativa de verdad, P(x), y el de función veritacional F(p, q). La tesis de la adecuación a la ciencia del referido concepto de verdad, dentro del pensamiento de los filósofos citados, se deduce del hecho de que todos ellos asumieron que la lógica de primer orden era el mejor medio para formalizar axiomáticamente las teorías matemáticas y físicas y para definir las condiciones que permitan decidir si sus enunciados componentes son verdaderos o falsos. Esta concepción estaba enraizada en la lógica clásica bivalente que hasta entonces era la única aceptada normalmente por la comunidad científica y filosófica.

3. Dentro del mismo contexto, maduró la tesis de que el concepto central de la semántica lógica era el de verdad y, de la sintaxis lógica, el de prueba o deducción. Esta distinción se encuentra en la base misma de los teoremas de Gödel y de Tarski que son probablemente los más importantes de la investigación en lógica-matemática de la primera mitad de la pasada centuria. Asimismo, el resultado intuitivo más destacable de ambos teoremas, en relación con nuestro tema, ha sido el establecer que los conceptos de verdad y de prueba no son coextensivos, debiendo admitirse que todo esfuerzo por sustituir todas las afirmaciones verdaderas de una teoría por teoremas está, en general, condenado al fracaso por las limitaciones que imponen las condiciones de constitución de los formalismos. Este comentario es pertinente debido a que alrededor de la década del 30 hubo más de una propuesta en el sentido de suprimir el concepto de verdad del lenguaje científico para así evitar las dificultades que su uso entrañaba.

4. La confianza en la posibilidad de dar formalización lógica a las teorías matemáticas y físicas y la existencia de paradojas dentro de la teoría de conjuntos formalizada incrementó la preocupación por lograr una definición del concepto de verdad lógicamente consistente y adecuada a las necesidades de la ciencia. El teorema de Tarski tuvo la virtud de lograr este objetivo dentro del contexto de la concepción aristotélica que definió la verdad en términos de correspondencia entre lo que se dice y lo que ocurre. De esta manera fue posible garantizar la objetividad de la ciencia admitiendo la hipótesis de que toda teoría está ligada a un lenguaje observacional, el cual está constituido por enunciados protocolarios que constituyen descripciones que son imágenes o representaciones de los hechos o estados de cosas. La definición de Tarski posibilitaba definir la verdad de cada uno de los enunciados protocolarios y luego, de manera conjuntiva, proporcionar una definición del concepto de verdad para el lenguaje observacional de la teoría que era el caso. Esta posibilidad de aislar el lenguaje de observación estaba sustentada en la conocida partición del lenguaje científico propuesta por Carnap, según la cual podía discriminarse válidamente entre el lenguaje teórico y el lenguaje

observacional. Al propio tiempo se presuponía que era posible construir un lenguaje observacional, común a diferentes teorías físicas, circunscribiéndose de este modo las discusiones relevantes al nivel del lenguaje teórico, donde propiamente se localizaban las discrepancias originadas en las interpretaciones alternativas de los llamados datos observacionales. Sin embargo, debe anotarse que desde el siglo XIX surgió la dificultad planteada por el hecho de que, en la física, las descripciones del comportamiento de la energía luminosa podían hacerse igualmente en términos de ondas o en términos de partículas, lo que resultaba una dificultad muy fuerte para el ideal del lenguaje de observación libre de interpretaciones ambiguas sugerido por la filosofía de Carnap.

5. Paralelamente, y por influencia directa de Russell y Wittgenstein, el lenguaje científico-empírico había sido separado del lenguaje lógico y matemático, el cual estaría constituido, estrictamente, por tautologías cuya propiedad más relevante parecía ser la de ser construcciones puramente sintácticas sin capacidad alguna para describir la realidad. Con el mismo estatuto que las tautologías fueron incorporadas a la discusión las llamadas verdades de razón de Leibniz, con la calificación kantiana de enunciados analíticos. Ello llevó a restablecer, en una nueva versión, la tesis de Kant de que el conjunto de los enunciados analíticos (incluyendo la lógica y la matemática) era disjunto respecto del conjunto de los enunciados sintéticos (enunciados científico empíricos). Dentro de este contexto, el concepto de verdad lógica devino en el concepto de validez lógica para poner énfasis en que la verdad de los enunciados analíticos se establecía por mecanismos internos al lenguaje, los mismos que se regían por reglas composicionales ligadas a la verdad de un enunciado en mundos posibles y por el principio de consistencia. Así, las tautologías resultaron la versión moderna de los enunciados leibnizianos verdaderos en todos los mundos posibles. De otra parte, la verdad de cada enunciado sintético podía decidirse mediante la aplicación de la definición de Tarski.

6. Las limitaciones del punto de vista anterior, representado principalmente por el *Tractatus* y la filosofía de la ciencia de Russell, fueron advertidas tempranamente por Reichenbach, quien señaló que si las leyes científicas se obtienen por métodos inductivos, entonces, en tanto que los enunciados científicos son cuantificados universalmente, en ningún caso son equivalentes a un conjunto finito de enunciados de observación y, por tanto, dichas leyes solamente pueden ser enunciados de probabilidad. Consecuentemente, Reichenbach sugiere cautela en el uso del concepto de verdad para calificar a las leyes científicas y propone que estas sean consideradas enunciados de probabilidad que toman valores reales dentro del intervalo [0,1], de conformidad con las propiedades del cálculo estándar de probabilidades. Añade a este punto de vista la tesis que sostiene que la investigación científica debe ser concebida como un proceso de aproximaciones sucesivas a la verdad, que en este caso estaría expresada, limitadamente, por el valor de probabilidad. Adicionalmente, entender a las leyes científicas como enunciados probabilísticos haría más justicia al carácter perfectible del conocimiento humano, propiedad que es incompatible con el ideal kantiano de verdades definitivas, universales, necesarias y apodícticas.

7. Desde premisas distintas, Carnap sugirió la sustitución del concepto de verdad para evaluar a las proposiciones o a las leyes científicas, reemplazándolo por la función de confirmación, la misma que dentro de su sistema de lógica inductiva asume valores reales del cálculo de las probabilidades estándar. A Carnap y Reichenbach los acerca su cautela frente

al uso del concepto de verdad y lo que los separa es su diferente definición del concepto de probabilidad aplicable a las leyes científicas. Para el primero, se trata de una relación entre rangos lógicos; para el segundo, de una relación frecuencial muy semejante a la de la probabilidad estándar.

8. La crítica de Popper a la inducción, como un mito creado por Bacon, también hay que entenderla, por extensión, como una crítica a la pretensión tradicional de calificar a las leyes científicas como enunciados verdaderos. Desde su punto de vista, el hecho de que las leyes científicas sean afirmaciones generales y universales hace imposible, lógicamente, hablar de su verdad tomando como fundamento un conjunto de enunciados observacionales que, por limitaciones prácticas, es necesariamente finito. Por ello, Popper concibe a las leyes científicas como prohibiciones y prefiere evaluarlas en términos de su contenido cognoscitivo y no de su valor de probabilidad. Aunque Popper, para la descripción del contenido cognoscitivo de un enunciado se basa en los resultados de Shannon, adiciona a su argumentación un criterio de relevancia expresado en la noción de riqueza de contenido de una hipótesis científica. De esta suerte, establece una relación entre el contenido de verdad y el contenido de falsedad de una hipótesis científica para determinar su verosimilitud, concepto que optimistamente sustituiría adecuadamente al de verdad en la calificación de las leyes científicas.

9. Anotamos que la cautela de Reichenbach, Camap y Popper respecto del uso del concepto de verdad está restringida a la evaluación del denominado lenguaje teórico, constituido por enunciados generales universales. Un subconjunto de estos enunciados está integrado por las llamadas leyes científicas. Los tres investigadores compartirían, aunque, sólo Popper lo hizo explícitamente, la tesis de que la definición de verdad de Tarski sigue siendo aplicable al lenguaje observacional. Sin embargo, en la discusión filosófica, lo que ha contado es la manera como se ha calificado a las leyes científicas y a las teorías, entendidas estas como conjuntos de leyes.

En los tres casos se encuentra cautela frente al uso del concepto de verdad y una marcada preferencia por sustituirlo por el de probabilidad o el de verosimilitud, según sea el caso. Empero, el punto de vista descrito no ha sido incompatible con el hecho de que estos pensadores hayan sostenido la tesis de que es posible distinguir claramente entre el conocimiento científico y el no científico, aunque para ello, como es conocido, hayan propuesto criterios distintos. El de refutabilidad en el caso de Popper y el de confirmación y de éxito predictivo en los casos de Carnap y Reichenbach. Este contexto también explica la necesidad de introducir sistemas lógicos no-bivalentes, a diferencia de la lógica tradicional, que permitan distinguir los diferentes matices generados por la necesidad de evaluar a las leyes científicas. Así se entiende el surgimiento de la lógica polivalente de Reichenbach y los sistemas previos de Lukasiewicz.

10. Quine es probablemente el lógico matemático creador que ha formulado las críticas más duras y de mayores repercusiones en la comunidad académica internacional al uso del concepto de verdad institucionalizado por los filósofos neopositivistas y por su adversario amistoso Popper. En su conocido artículo *Dos dogmas del empirismo* objeta severamente la distinción entre verdades de razón (enunciados analíticos) y verdades fácticas (enunciados sintéticos) argumentando en el sentido de que un enunciado analítico, aplicando adecuadamente sustituciones por sinonimia, puede devenir de verdadero en falso. De este modo

pretende haber demostrado que la tesis del neopositivismo que sostiene que los enunciados analíticos y los enunciados sintéticos constituyen conjuntos disjuntos es falsa. En su lugar, propone asumir que entre la lógica, la matemática y los enunciados de las ciencias factuales hay una continuidad que no permite establecer fronteras precisas. Asimismo, de su propuesta se deriva inmediatamente que la definición del concepto de verdad de Tarski es inaplicable al lenguaje observacional debido a que presupone que el problema de la referencia de las afirmaciones científicas está resuelto y, en consecuencia, puede establecerse una relación de correspondencia entre lo que se dice y lo que ocurre. Sin embargo, según Quine, esto es un optimismo excesivo que ignora que la referencia es inescrutable, como lo demostraría su clásico argumento sustentado en el uso de la palabra bagabay que aparece en su libro *Palabra y objeto*. Ciertamente, si es que se acepta la inescrutabilidad de la referencia, el concepto de significado denotativo también queda indeterminado, pues el hecho de que dos personas usen la misma palabra, con efectos observables análogos, no garantiza que se refieran a lo mismo. Consecuentemente, al quedar indeterminado el significado, también queda indeterminada la posibilidad de la traducción de un enunciado a otro y, consecuentemente, no tendría así sentido hablar de la correspondencia de un enunciado con los hechos que pretende describir, ni tampoco de la equivalencia significativa de un enunciado respecto de otro.

11. Lo que resulta curioso en un pensador de la estatura de Quine es que su crítica a la distinción entre enunciados sintéticos y enunciados analíticos presupone la confiabilidad y la validez de la sinonimia, lo que implica que en este caso el significado puede ser determinado y la referencia establecida, lo que obviamente contradice la tesis que formula para criticar la clásica teoría de la verdad sustentada en la correspondencia entre lo que se dice y lo que ocurre. Notables filósofos con formación en lógica como Hilary Putnam, Donald Davidson y Richard Rorty, entre otros, parecen haber asumido la validez de los argumentos de Quine, contenidos en *Dos dogmas del empirismo*, sin advertir la inconsistencia interna que entrañan y, más bien, enfatizando una de las consecuencias más resonantes de tales puntos de vista, han incidido en el hecho de que ellos implican que la distinción nítida entre ciencia y no ciencia es inviable en la medida que al ser inescrutable la referencia no es posible decidir si una determinada teoría científica es o no una descripción objetiva del mundo. Todo lo que puede decirse de ella es que es un instrumento adecuado para la organización de nuestra experiencia del mundo en el sentido de que nos permite saber a qué atenernos. Dentro de este contexto, según Quine, decir que '**p**' es verdadera es simplemente afirmar que predice acertadamente mis experiencias en el sentido de que las experiencias **A** me anuncian que, en un tiempo más o menos determinado, tendré las experiencias **B**, lo que me permite formular explicaciones, predicciones y regular mi comportamiento en el mundo mediante el control conductual de mis entradas y salidas. De esta manera, en relación con la ciencia, una hipótesis es verdadera solo en la medida que me asegura que ciertas experiencias producirán otras, pero no en el sentido de que describe con exactitud lo que ocurre externamente al lenguaje. De ello se deduce que, si bien la mecánica cuántica es mejor predictora de la experiencia humana que el sistema explicativo fundado en el temperamento de las divinidades griegas, no es empero sostenible como una descripción más adecuada de lo que llamamos realidad. Según Quine, nuestros mitos son más eficientes que los mitos griegos en relación con nuestra experiencia, pero no necesariamente más verdaderos. A partir de estas premisas, no resulta sorprendente que existan pensadores que tratan a la ciencia como un relato, pues, según Quine, cada teoría científica define lo que existe para ella, vale decir, su propia ontología. Ser una entidad, desde esta perspectiva, es ser un ejemplo de sustitución de la variable **x**

en la función proposicional P(x), donde el predicado tiene sentido solamente dentro del lenguaje de la teoría a la que pertenece. Por tanto, la pregunta acerca de lo que existe solo tiene sentido dentro del marco del sistema de conceptos de una teoría específica.

12. El programa de Kuhn[6] en *La estructura de las revoluciones científicas* puede entenderse, en nuestra opinión, como una investigación para aportar pruebas históricas de que el análisis practicado por Quine en *Dos dogmas del empirismo* posee fundamento en los hechos. En efecto, la tesis de la inconmensurabilidad de las teorías científicas lo que pretende probar es que la continuidad histórica en el uso de los conceptos de movimiento, espacio y tiempo, entre otros, no es garantía alguna de que en diferentes etapas de desarrollo del conocimiento se haya estado hablando de lo mismo. Kuhn aporta indicadores de que Ptolomeo, Galileo, Newton y Einstein, bajo el uso de los mismos términos, han hablado de cosas muy distintas. Quienes pensaron que el uso de los mismos términos revelaba una continuidad acumulativa en el desarrollo del conocimiento se equivocaron porque desconocieron el hecho de que la referencia es inescrutable, según Quine, y, consecuentemente, pensaron que las sucesivas teorías físicas expresaban una acumulación de conocimientos sobre el mismo tema, cuando realmente trataban de asuntos muy distintos. Este es el núcleo del argumento que lleva a afirmar a Kuhn que la mecánica de Newton no es reducible como un caso particular a la mecánica de la teoría general de la relatividad, en la medida que ellas presuponen comprensiones muy distintas de los conceptos de movimiento, masa, espacio y tiempo. Claramente, bajo estas condiciones, lo que se obtiene en la práctica es reducciones o traducciones en los métodos de cálculo pero no en la comprensión del mundo, en tanto que dos paradigmas sucesivos en el desarrollo de la física serían inconmensurables y excluyentes.

13. La tesis de la inescrutabilidad de la referencia de Quine no pretende objetar la definición del concepto de verdad de Tarski en términos de su generalidad, pues es parte sustancial de esta definición el establecimiento de que no es posible formular una definición del concepto de verdad que sea válida para todo lenguaje, sino en el sentido de que la correspondencia entre lo que se dice y lo que ocurre no puede ser precisada de manera fiable. Thomas Kuhn pretende aportar prueba histórica de que, en efecto, en el desarrollo de la ciencia, nunca ha sido relevante tal correspondencia debido a que los investigadores siempre han observado lo que el paradigma vigente les permitía observar y han obviado aquello que era incompatible con él. De este modo, la distinción propuesta por Carnap entre el lenguaje observacional y el lenguaje teórico carecería de sustento en los hechos debido a que el lenguaje observacional tiene significado solo dentro del contexto creado por el sistema de conceptos propio de un paradigma específico. Consecuentemente, el investigador normal interpreta el lenguaje observacional e interpreta sus percepciones condicionado por el núcleo teórico del paradigma. Esto explica que, hipotéticamente, los mismos hechos sean descritos de manera diferente por observadores que participaban de diferentes paradigmas, lo que ha ocurrido, por ejemplo, con los defensores de la teoría corpuscular y de la teoría ondulatoria respecto de la naturaleza de la luz.

14. El programa de Kuhn, desde las premisas anteriores, ha conducido a afianzar la tesis que sostiene que históricamente no es posible arbitrar un criterio que nos permita decidir cuándo una teoría describe adecuadamente la realidad, sino, en su lugar, solo contamos con paradigmas que es mejor calificar de vigentes o no. La pretensión de obtener una teoría que describa la realidad en términos de correspondencia con la misma resulta, así, o una

quimera o una mala comprensión de lo que es la ciencia. Y el uso del concepto de verdad, en el contexto de la definición de Tarski, deviene en una pretensión que no tiene sustento ni en el análisis del lenguaje científico ni en la confrontación con los hechos históricos.

15. Recientemente, en un ciclo de conferencias realizado en Lima, Stephen French emprendió la tarea del defender el realismo señalando que los problemas de la referencia se producen cuando se habla de las propiedades observables de los fenómenos, pero no cuando se describe la realidad en términos de estructuras que muestran un comportamiento estable. De este modo, puede estar en cuestión el valor puntual de una variable, pero no la estructura dentro de la cual ella se define. Por ejemplo, no parece discutible que un sector importante de fenómenos de la mecánica cuántica sea describible mediante un grupo algebraico. Sin embargo, dicho punto de vista, al asumir como reales las estructuras, no esclarece que ellas siempre se expresan a través del lenguaje matemático y, por tanto, de esta suerte lo único real sería la forma matemática de la realidad, conclusión que nos devuelve a Platón.

16. El breve recuento[7] realizado pretende mostrar el derrotero que ha seguido el uso del concepto de verdad en la filosofía de la ciencia actual y las dificultades que ha entrañado, siendo la principal aquella que conlleva la ausencia de una distinción clara entre ciencia y no ciencia. Este cuestionamiento corre paralelo con el surgimiento de pruebas concluyentes de que hay maneras alternativas de hacer lógica, hecho que fue obviado por teóricos como Carnap, Quine o Popper, pero que hoy día no admite mayor discusión con el desarrollo profuso de las lógicas no-clásicas. Al mismo tiempo, se ha construido las teorías de conjuntos difusos que permiten conceptualizar mejor las cuestiones que no admiten fronteras claras y distintas, no por falta de información ni por falta de un procedimiento decisorio, sino, presumiblemente, por la naturaleza misma de las cosas. Estos resultados crean un nuevo contexto, bastante más amplio que el de la lógica clásica, que posibilita maneras más finas de evaluar el conocimiento científico. No pensamos que sea satisfactorio, como lo ha pretendido, entre otros, Shapere, «acudir solo a las buenas razones». Es necesario lograr mejores precisiones y reconocer que, aunque por ahora la lógica clásica es suficiente para dotar de un aparato deductivo a las teorías científicas relevantes, es sin embargo muy insuficiente para discriminar los matices que la evaluación de la ciencia contemporánea requiere. En esa dirección, se hace necesario o un conjunto de criterios o un conjunto de principios regulativos de validez para la ciencia, lo que puede vislumbrarse en términos de que toda teoría científica relevante debe ser capaz de organizar lógicamente nuestra experiencia del mundo y de probar que sus afirmaciones poseen un significado que nos relaciona externamente, en algún sentido, con lo que llamamos realidad.

17. En la medida que el cuestionamiento del uso del concepto de verdad en la ciencia puede afectar una concepción equilibrada de la misma y estimular tendencias nihilistas, es pertinente recordar que, cuando no es posible la descripción precisa o la argumentación conclusiva, se puede recurrir a la metáfora, como nos lo enseñó Platón con la alegoría de la caverna o Aristóteles con la de los murciélagos. Por ello, es adecuado finalizar esta ponencia haciendo un recuento de tres imágenes que sugieren cuál es la estructura de la ciencia y el modo en que ella nos proporciona una manera de saber a qué atenemos en nuestra relación con lo que denominamos mundo. Popper propuso entender las teorías como redes de proposiciones que nos permiten «pesear» la realidad al precio de que siempre se nos escurra, a través de su tejido, una parte importante de ella. Quine en *Dos dogmas del empirismo* nos

sugiere concebir el conocimiento científico como un pórtico en forma de arco construido de bloques de piedra. En él solo los bloques de las columnas descansan sobre el piso pero los del dintel se sostienen gracias a la presión ejercida por la estructura en su conjunto. En esta imagen los bloques o ladrillos son las proposiciones científicas, el piso los datos de la experiencia y la mayor o menor altura del dintel sugiere el grado de abstracción de los enunciados que constituyen las teorías. La tercera metáfora es la del mapa y la usa entre otros B. C. van Frassen. La sugerencia es que una teoría es una especie de mapa para orientarnos en un cierto territorio por explorar, pero como tal es solo un esquema que para sernos útil requiere de información adicional sobre el lugar específico donde nos encontramos, la cual obtenemos observando el ámbito territorial que nos circunda en un momento dado y no el mapa. Asimismo, se admite que hay varias maneras, no necesariamente equivalentes, de hacer un mapa de, por ejemplo, la misma ciudad. Análogamente, Quine sostiene que un pórtico en forma de arco podría hacerse de varias maneras no necesariamente equivalentes.

Las metáforas anteriores están dirigidas, más que a describir lo que son las teorías científicas, a proponer una concepción de la función que cumplen éstas en el desarrollo del conocimiento y de las relaciones que ellas guardan con lo que en unos casos llamamos mundo y, en otros, realidad. Las tres metáforas sugieren que las teorías son sólo esquemas para explorar el mundo. La del pórtico y la del mapa sostienen que hay muchos esquemas posibles para comprender la realidad —no necesariamente equivalentes entre sí—, lo que implica que no hay una única teoría racionalmente aceptable. La de la red sostiene que no existe la teoría definitivamente verdadera, pero sí la que nos permite, por ahora, «pescar» mejor, esto es, la que es racionalmente aceptable con exclusión de todas las otras que no sean lógicamente equivalentes a ella. Respecto a las relaciones con el mundo, las posturas claramente contrapuestas son la del pórtico y la de la red. Para la primera, lo que llamamos mundo o realidad es inseparable de nuestros esquemas conceptuales y no hay garantía alguna de objetividad plena porque, respecto de lo que se considera un mismo hecho, no hay manera de decidir si los denominados enunciados de observación formulados por un primer observador son equivalentes a los formulados por un segundo observador. Para la segunda, la objetividad sí es posible como intersubjetividad que supone admitir que los observadores calificados de un mismo hecho están de acuerdo acerca de lo que ocurre. Sin embargo, si se trata de reducir este acuerdo a una posición convencionalista, consideramos que lo más razonable es fundar el consenso en la postulación de una realidad distinguible de nuestros esquemas conceptuales y con la que nuestros enunciados de observación guardan alguna forma de correspondencia.

Es justificable todavía el uso de concepto de verdad en epistemología

I. Planteamiento del problema

La presente ponencia asume como un hecho constatable que durante el siglo pasado el uso del concepto de verdad para evaluar el conocimiento científico ha mostrado una tendencia decreciente. Por razones de espacio me excuso de aportar argumentos justificatorios de la afirmación anterior debido a que este punto de vista lo he defendido en un artículo que figura en las actas del VII Congreso Nacional de Filosofía realizado en la Universidad Católica de Lima en 1998[77]. En lo que sigue me propongo inicialmente proporcionar buenas razones para probar que las tesis que han sostenido la eliminabilidad del concepto de verdad en la evaluación de la ciencia, a través del argumento conocido como de la redundancia o de la afirmación desencomillada de un enunciado, son infundadas pese al brillo intelectual de algunos de sus teóricos, entre ellos, F. P. Ramsey, T. Kotarbinski y W. O. Quine. En segundo lugar mostraremos que la concepción semántica de la verdad de Alfredo Tarski constituye el planteamiento teórico más sólido del siglo XX para dar cuenta del uso adecuado de dicho concepto en las ciencias formales, en las factuales o empíricas, en la Epistemología y en el lenguaje cotidiano u ordinario. Para ello probaremos que la modificación a la definición del concepto de verdad de Tarski, propuesta por Popper, es insatisfactoria porque le quita generalidad y reabre una larga discusión, de complejidad comparable a la suscitada por el concepto de verdad, sobre la definición del concepto de hecho. En el mismo sentido probaremos que las teorías consensualistas de la verdad, de aliento pragmatista, de J. Habermas y O. Appel no son alternativas sostenibles a la tesis de Tarski debido a que carecen de consistencia interna o conducen a una problemática difusa, imprecisa y metafísica cuando pretenden definir el concepto de consenso fundado. Finalmente, abordamos un tema que Tarski dejó pendiente debido a que, muy probablemente, no consideró pertinente indagar por la justificación de nuestra tendencia a aceptar que existen enunciados que son verdaderos en tanto que son satisfechos por los objetos del mundo externo. Consideramos que esta última problemática, cuya solución presumiblemente ha excedido los intereses de Tarski, ha recibido un tratamiento insatisfactorio desde el punto de vista tanto del denominado realismo interno como de los consensualismos.

77 Este artículo aparece en la Revista *Letras*, volumen 77, números 111-112, diciembre 2006, pp. 8-20.

II. La pertinencia de la convención T

Es del caso anotar que cuando se formuló inicialmente la tesis que sostenía la eliminabilidad del predicado verdadero por parte de Ramsey y Kotarbinski todavía no se había demostrado el segundo teorema del Gödel, ni Tarski había formulado su definición del concepto de verdad para los lenguajes formalizados. De conocer Ramsey estos resultados posiblemente hubiera modificado su punto de vista en la medida que ellos probaron la inviabilidad del proyecto formalista. En efecto, de los resultados, complementarios entre sí, de Gödel (1930) y de Tarski (1931) se deduce claramente que el concepto de verdad en la lógica, en la matemática y en las ciencias matematizadas no es reemplazable por el concepto de prueba ni es fácilmente omitible en tanto que a través de la definición de Tarski, denominada por él mismo convención **T**, se prueba expeditivamente la consistencia de las teorías científicas formalizadas a través de versiones reformuladas del teorema de Löwenheim – Skolem. En el caso de Quine, que conoció estos resultados, su argumento que afirma la trivialidad por redundante de la convención **T** parece estar inducido por la simplicidad del conocido ejemplo:

a) El enunciado 'La nieve es blanca' es verdadero si y solo si, la nieve es blanca.

En este caso es claro que la afirmación *"La nieve es blanca' es verdadera"* equivale simplemente a reconocer que *la nieve es blanca,* lo que es aceptable bajo la presuposición de que todos conocemos el color de la nieve. Sin embargo, si tomamos como ejemplo:

b) La primera línea de la *Metafísica* de Aristóteles es verdadera si, y solo si, todos los hombres tienden por naturaleza al saber,

la aceptación del enunciado nombrado en el **definiendum,** sin necesidad de afirmar expresamente su verdad, no es tan sencilla como en el caso anterior debido a que el conocimiento del texto de la *Metafísica* de Aristóteles no es parte de la experiencia cotidiana y a que aún en el caso de que seamos buenos lectores del estagirita, el enunciado *Todos los hombres tienden por naturaleza al saber* es de aceptabilidad muy discutible en relación con la del que describe el color de la nieve. Sin embargo, alguien podría argumentar que si supusiéramos la existencia de una comunidad de peripatéticos altamente informados de la obra de Aristóteles, entonces la omisión del concepto de verdad en el ejemplo b) sería posible. El argumento anterior da lugar a que para fundamentar nuestra tesis recurramos a un ejemplo que pruebe de manera concluyente que el predicado verdadero no es omitible bajo la suposición de un contexto adecuado. Nos valdremos de uno propuesto por Tarski.[78]

c) Todas las consecuencias de los enunciados verdaderos son verdaderas

En este caso el cuantificador universal nos permite referirnos a una clase infinita de enunciados verdaderos que no es posible reducir a una conjunción completa de enunciados presentados desencomilladamente.

Es un hecho conocido que la tesis que afirma que el concepto de verdad es omitible por ser redundante no es razonablemente sostenible en las teorías científicas formalizadas en

78 Tarski (1944), p. 92

virtud de la validez de los resultados de Gödel y Tarski. No lo es tampoco en todos los casos, como el ejemplo c), en los que mediante el lenguaje ordinario, empleado como metalenguaje intuitivo, formulamos metaenunciados cuantificados universalmente para hablar de clases no finitas de enunciados verdaderos. En estos casos, de asumir la tesis de la redundancia omitible, que es una forma de deflacionismo, renunciaríamos al uso de los criterios específicos de satisfabilidad, propios de las comunidades científicas, que nos permiten descartar a los enunciados que no pueden formar parte de una teoría contrastable. Y es ciertamente más compatible con nuestro punto de vista pensar que es la satisfabilidad la que sustenta la aceptabilidad que la inversa.

III. *Verdad* como *satisfabilidad*

En este apartado trataremos de justificar la tesis que sostiene que la definición del concepto de verdad para los lenguajes formalizados aportada por Tarski constituye el planteamiento más riguroso del siglo XX para explicar satisfactoriamente el uso del concepto de verdad en la ciencia y en las argumentaciones que tienen algún tipo de pretensión de validez, como es el caso de las filosóficas. El mismo Tarski ha señalado que su definición está construida dentro de lo que él califica como concepción semántica, entendiendo a la semántica como una disciplina que estudia las relaciones entre las expresiones de un lenguaje y los objetos o estados de cosas a los que se refieren estas expresiones.[79]

Los conceptos centrales de la semántica tarskiana son los de designación, definición, satisfacción y verdad. Sin embargo, solamente los tres primeros pueden ser entendidos como predicados relacionales de dos posiciones que establecen un vínculo entre expresiones y objetos. Para probar que las definiciones cumplen también esta función recurre al caso en el que una ecuación con raíz única del tipo **2.x=1** define unívocamente al objeto **½**. El concepto de verdad, a diferencia de la concepción tradicional basada en la clásica expresión latina *adaequatio intellectus et rei*, en este contexto, no establece una relación entre lo dicho o pensado y las cosas porque, simplemente, es un predicado de una posición que se aplica solamente a un enunciado que es definido en términos de la relación de satisfacción que es, propiamente, el predicado relacional que establece un vínculo entre las expresiones y los objetos a los que ellas se refieren.

En consecuencia, el concepto de verdad, desde esta perspectiva, es semántico no por establecer un vínculo entre expresiones y objetos sino por estar definido en términos del concepto semántico de satisfacción. El argumento anterior marca una diferencia teórica entre las tesis de Tarski y las tradicionales tesis de la correspondencia aunque ello no ha sido enfatizado suficientemente por dicho autor. Sin embargo, en esta distinción puede encontrarse una primera explicación a la renuencia de Tarski a introducir en su definición el concepto de correspondencia como lo han sugerido, entre otros, Popper.

Es sabido que la definición del concepto de verdad, en su versión rigurosa, contenida en su trabajo publicado en polaco, en una versión restringida presentada por J. Lukasiewicz en 1931[80], fue construida dentro del lenguaje formalizado del cálculo de las clases, como un ejemplo que posibilita la aplicación de esta metodología a otras áreas. Como puede observarse

79 Tarski (1944) p. 72
80 Tarski (1956) p.152. Cita a pie de página.

en la cita siguiente, tomada de la versión inglesa titulada *Concept of Truth in Formalized Languages*, tal definición carece de la apariencia de simplicidad y obviedad que presentan las divulgaciones de esta definición realizadas por el mismo Tarski.

Definition 23. **x** is a true sentence –in symbols **x** ∈ **Tr**– if and only if **x** ∈ **S** and every infinite sequence of classes satisfies **x**.[81]

En tanto que la definición anterior fue formulada en un contexto de investigación en el que los resultados del primer informe solo eran válidos sin restricciones para lenguajes de orden finito, conviene en este caso recurrir al resumen que hizo el propio Tarski de las modificaciones que hizo, para superar las dificultades antes anotadas, en un *Postscript* (1936). En dicho resumen ya no aparece limitación alguna respecto del orden finito o no del lenguaje y solo se recurre al orden del metalenguaje que debe ser igual o mayor que el del lenguaje objeto. De esta manera, se enfatiza aquello que se ha divulgado en términos de que la riqueza expresiva del metalenguaje debe ser mayor que la del lenguaje objeto de tal suerte que la semántica del lenguaje objeto pueda estar incluida en las sintaxis del metalenguaje que, en la cita que a continuación hacemos, es denominada morfología.

> For every formalized language a formally correct and materially adequate definition of true sentence can be constructed in the metalanguage with the help only of general logical expressions, of expressions of the language itself, and of terms from the morphology of language –but under the condition that the metalanguage possesses a higher order than the language which is the object of investigation.
> If the order of the metalenguage is at most equal to that of the language itself, such a definition cannot be constructed.[82]

IV. El carácter contextual de la convención T

La versión simplificada de la denominada por su autor convención T es la siguiente equivalencia

(T) **X** es verdadera si, y solo si, **p**.

Utilizaremos la equivalencia **T** en tanto que facilita la explicación de las características fundamentales de la definición del concepto de verdad de Tarski. **El esquema T no pretende ser una definición del concepto de verdad sino del concepto de oración, proposición o enunciado verdadero en un lenguaje objeto dado L**, lo que debe entenderse, además, como una definición parcial del concepto de verdad para dicho lenguaje **L**. La definición completa del concepto de verdad para el lenguaje finito **L** estaría dada por la conjunción lógica que tiene como cada uno de sus componentes a cada uno de los reemplazos realizados con los nombres de las proposiciones de **L** en lugar de ***X*** y con el texto de cada una de dichas proposiciones de **L** en reemplazo sucesivo de ***p***.

Tarski prueba que la definición anterior es formalmente correcta y materialmente adecuada. Lo primero debido a que solo es aplicable a lenguajes-objeto formalizados describibles

81 Tarski (1956) p.195.
82 Tarski (1956) p.273.

mediante metalenguajes con cuyos medios expresivos es posible hablar de la verdad de las oraciones de los lenguajes-objeto sin incurrir en contradicción lógica. Lo segundo debido a que la convención **T** posibilita realizar para un lenguaje **L** tanto definiciones parciales como totales del concepto de verdad siempre que el metalenguaje de **L** sea de un orden mayor que el de **L**.

El ejemplo más conocido que revela incorrección formal es la paradoja del mentiroso o de Epiménides, contradicción construible en los lenguajes naturales debido a que estos no distinguen entre lenguaje-objeto y metalenguaje. Esta peculiaridad da lugar a que Tarski los califique de lenguajes semánticamente cerrados y los descalifique para el uso científico debido a que la inconsistencia que es construible en ellos, desde su punto de vista, es una propiedad que invalida a un lenguaje como medio de expresión científica.

Con respecto al concepto de satisfacción, su uso en la convención **T**, en su versión simplificada, está resuelto por la presencia de *p*. Sin embargo, ello resulta insuficiente si consideramos que la solución dada por Tarski al uso científico del concepto de verdad gravita decisivamente sobre el significado del concepto de satisfacción en el *definiens* de la convención **T**, lo que transfiere la solución final a los criterios imperantes en cada comunidad científica. Adicionalmente, es importante anotar que en numerosos trabajos en lógica se invierte el sentido del uso tarskiano. Esto es, el concepto de satisfacción se define en términos del concepto de verdad, procedimiento que presupone al concepto de verdad como concepto no definido. Sin embargo, por razones que no es el caso detallar en esta ponencia, pensamos que la decisión metodológica tarskiana de introducir el concepto de verdad como concepto definible es filosóficamente más esclarecedora y metodológicamente más productiva. En esta dirección, Tarski asume que dada la función proposicional **P(x)**, donde **P** es el predicado '... *es el menor número entero positivo*' y dada la función proposicional **Q(x)**, donde **Q** '... *es el mayor entero positivo*', toda miembro de la comunidad matemática sabe que el número **1** es el único objeto que satisface a la primera y que no existe número alguno que satisfaga la segunda. Consecuentemente, aplicando la definición 23 (antes transcrita) resulta claro que la proposición **'(∃x) P(x)'** es verdadera y que **'(∃x) Q(x)'** es falsa.

En general, Tarski apela a la validez del principio del tercio excluido y sostiene que una proposición $\boldsymbol{p}$ es o verdadera o falsa. En el primer caso $\boldsymbol{p}$ es satisfecha por todos los objetos y $\sim \boldsymbol{p}$ no es satisfecha por objeto alguno. Obviamente en el caso en el que $\sim \boldsymbol{p}$ sea satisfecha por todos los objetos $\boldsymbol{p}$ es falsa. Para un análisis más detallado del concepto de satisfacción es necesario recurrir al concepto de interpretación, expediente que omitiremos debido a que para los fines de lo que queremos probar ha sido suficiente aclarar el funcionamiento del concepto de satisfacción en el *definiens* de la convención T y mostrar que decidir si estamos o no ante un *definiens* aceptable es generalmente un procedimiento complejo que corre a cargo de cada comunidad científica.

Por ejemplo, la definición siguiente '$\forall x_1 \exists x_2 x_2 \subseteq x_1$' ***si y solo si, para toda clase b hay una clase a tal que*** $a \subseteq b$ [83] es satisfacible dentro del cálculo de clases. Sin embargo, cualquier persona no está en condiciones de decidir su aceptabilidad o pertinencia como sí ocurre en el famoso caso de la proposición *'La nieve blanca'*. Para saber si se cumple o no la condición de satisfacción hay que pertenecer a la comunidad matemática y conocer que

83 Tarski (1956) p. 190.

el conjunto vacío está incluido en todos los conjuntos. Este conocimiento del contexto es materia del manejo de una semántica especializada, lo que explica que Tarski sostenga la no existencia de un criterio general de verdad.

V. Popper y los consensualistas

Popper en el capítulo 9 de *Conocimiento objetivo* se propone, por decirlo así, hacer más pedagógica la convención T en base a su experiencia docente, introduciendo la siguiente variante:

X corresponde a los hechos si, y sólo si, p .[84]

De este modo pretende convertir, sin desnaturalizarla, en más inteligible la convención T y en más acorde con la presumible intención de la definición de Aristóteles. El resultado no ha sido el esperado por Popper. En breve, para Tarski el concepto de verdad no expresa una relación entre objetos sino una propiedad especial de un objeto lingüística, en este caso, una oración o enunciado. Asimismo, si se introduce el concepto de hecho, la convención T sería aplicable sólo en el nivel factual y se tornaría muy discutible en el nivel de la matemática y de la lógica.

Habermas en un artículo publicado originalmente el 1973 bajo el título *Wahrheitstheorien*[85] defiende con detalle lo que él denomina la teoría consensualista de la verdad. Define al concepto de verdad dentro del marco del discurso argumentativo como una pretensión de validez entre cuatro posibles pretensiones. Las restantes son las de inteligibilidad, veracidad y rectitud. Lo que tipificaría a la verdad es que es una pretensión de validez que tiene como justificación el consenso fundado. A su vez el consenso fundado se justificaría a través de los esquemas mentales que ha internalizado la especie humana a través de su evolución, como, según Habermas, lo ha señalado certeramente Piaget.

La dificultad de esta tesis es que si el fundamento último de la verdad es un producto de la evolución de la especie humana en su interacción con el ambiente, entonces el fundamento de los enunciados verdaderos no es estrictamente el consenso sino un mecanismo de la selección natural. Por consiguiente, o la teoría de Habermas no es consensualista en el sentido enfatizado por el título del artículo, o lo es y entonces el proceso evolutivo se convertiría en una instancia explicativa pero no justificatoria. De admitirse esta segunda posibilidad la tesis de Habermas no sería necesariamente irreconciliable con la concepción semántica de Tarski pero tendría la limitación epistemológica de establecer fronteras muy difusas entre fundamento, justificación y explicación, lo que reduciría la pretensión de validez de verdad a un consenso fundado para los actores consensuantes, por así, decirlo, pero no necesariamente para los espectadores. A la anterior insuficiencia tendríamos que añadir que el aporte de Habermas, tal como está expresado en el artículo citado, no contribuye a la solución de problema alguno en los campos de la ciencia, la metodología y la filosofía. En el mejor de los casos contribuiría a entenderlo pero no a resolverlo en términos operativos.

84 Popper (1992) p.288
85 Nicolás y Frápoli (1997) pp. 543-595

El filósofo Otto Apel, que se ubica también dentro de las orientaciones consensualistas en un artículo titulado *¿Husserl, Tarski o Peirce? Por una teoría semiótico trascendental de la verdad como consenso*[86] defiende la tesis de que el concepto de verdad aplicado a enunciados se justifica, siguiendo a Peirce, como una idea reguladora que orienta hacia el logro de un consenso ideal y último dentro de una comunidad ilimitada de investigadores. Según Apel esta concepción supera las limitaciones de la teoría fenomenológica de la verdad que la define como evidencia, las limitaciones de la concepción semántica de Tarski y las del coherentismo de Hegel. Lo primero debido a que Husserl no consideró la relevancia del contexto lingüístico en la definición del concepto de verdad y se limitó a una noción de evidencia intuitiva desconectada de la acción comunicativa. Lo segundo debido a que Tarski resuelve los aspectos sintácticos y semánticos de la definición del concepto de verdad pero no aborda la dimensión pragmática que requiere una especial consideración de los signos indexicales que solo tienen significado dentro de un contexto pragmático.

Términos como 'este', 'aquí', 'otro', etc. solo son inteligibles en el contexto de la acción comunicativa y, por tanto, no deberían ser ignorados, como lo hace Tarski y Carnap, como elementos que forman parte del metalenguaje pragmático que es el que orienta, finalmente, las aplicaciones de cualquier lenguaje-objeto. Lo tercero se debe a que Hegel, que habría sostenido una tesis coherentista, no entendió suficientemente la función semiótica de los términos indexicales que son justamente los que nos permiten establecer una diferencia clara entre el discurso que se refiere al mundo real y el que se refiere a mundos posibles. El pragmatismo de Peirce habría superado las deficiencias anteriores al rescatar el valor de los términos indexicales, al enfatizar la conveniencia del uso de condicionales contrafácticos para analizar las experiencias posibles que cabe esperar y al destacar el falibilismo de los consensos reales como un hecho que nos permite entender la no realizabilidad del consenso ideal. La debilidad mayor del punto de vista de Apel es que hace descansar el uso del concepto de verdad en la aspiración de los investigadores a un consenso ideal que es, simplemente, una entidad metafísica a la cual se puede aplicar expeditivamente la Navaja de Occam con cargo a fundamentar el concepto de verdad en alguna forma de vínculo entre el lenguaje y el mundo externo.

VI. La imposibilidad de un criterio general de verdad

Respecto de nuestra tesis que sostiene que la concepción semántica de la verdad de Tarski es la conceptualización teórica sobre el tema más fuerte del siglo XX, en esta sección nos referiremos a sus insuficiencias epistemológicas y ontológicas que probablemente no son de especial relevancia desde el ángulo del quehacer lógico-matemático pero sí desde la perspectiva filosófica. Considero que la conocida tesis de Tarski que afirma que no existe criterio general alguno de verdad puede ser traducida en términos de que no existe criterio general alguno para decidir si cualquier función proposicional es o no satisfacible en un dominio de objetos que forman parte del mundo real o de alguna estructura matemática. Los criterios de satisfabilidad que pueden ser utilizados, por ejemplo, en una interpretación que tiene como dominio un conjunto de bacterias con propiedades bioquímicas son muy diferentes de los que podrían utilizarse en una interpretación que tiene como dominio unidades de un sistema monetario y propiedades económicas. Sin embargo, el hecho de que no se pueda arbitrar un criterio general no implica que no se pueda hacer afirmación relevante alguna en este nivel de análisis.

86 Nicolás y Frápoli (1997) pp. 597-616

Advertirnos que tener conciencia lúcida de que la aceptación o rechazo de si una función proposicional es o no satisfacible corre siempre a cargo, salvo los casos obvios, de una comunidad especializada es ya un avance. Sin embargo, es posible dar un paso más hacia adelante para superar las limitaciones de los consensualismos radicales y de los pragmatismos restringidos a la practicidad y al éxito. En ese sentido puede pensarse en algún principio ontológico que garantice que las expresiones de nuestros lenguajes científicos y naturales hacen referencia a un mundo externo. La acción comunicativa puede ser un buen punto de partida en esta dirección en tanto que presupone que los interlocutores hablan de objetos, procesos o hechos externos a sus mentes lo que incluye la externalidad material de los textos y fonemas a través de los cuales se comunican.

En otro caso, la única hipótesis que explicaría el hecho de la comunicación sería la que sostendría que los interlocutores leen recíprocamente sus mentes, posición metafísica insostenible que no solo haría innecesario el mundo sino también el lenguaje. El acuerdo, asimismo, presupone para ser aceptado que los interlocutores están hablando de lo mismo y que cada uno de ellos está dotado de voluntad independiente de la del otro. Si esto último no se cumpliera, el consenso no costaría trabajo alguno en tanto que estaría eliminada, en principio, la posibilidad de discrepar. Para descartar una posición extrema como la de Stace [87] en su defensa de idealismo anotaremos que incurre en un error atribuible también a los consensualistas que presuponen que toda afirmación verdadera es lógicamente argumentable, lo que en el caso de Stace significa claramente, lógicamente demostrable. Sin embargo, la afirmación *El mundo existe independientemente de que sea percibido por sujeto cognoscente alguno* puede ser verdadera y, en principio, no demostrable como lo posibilitan los resultados de Gödel.

Lo expuesto nos permite afirmar que los internalismos de todas las cepas son insostenibles y que la definición de Tarski es utilizable dentro de un contexto en el que estén presentes las teorías lógicas vigentes sobre la construcción de lenguajes formales y una ontología realista que nos asegure que al menos las ciencias fácticas formalizadas siempre pueden ser dotadas de una semántica realista. Ciertamente, el realismo de la definición del concepto de verdad de Tarski, como él mismo lo ha enfatizado, es próximo a Aristóteles pero no necesariamente al criterio de correspondencia que, además, Aristóteles no usó en su famosa definición del Libro Primero de la *Metafísica*. De lo argumentado, se deduce que menos aún debilitan nuestro punto de vista las objeciones derivadas de las teorías que han enfatizado los condicionamientos culturales y neurológicos de la percepción en tanto que nos es suficiente probar que conocemos el mundo en alguna forma y desde alguna parte y que solo al ojo de Dios le correspondería conocerlo de una sola vez y desde ninguna parte, por usar una metáfora grata a Hilary Putnam.

87 Stace (1965)

Bibliografía

Apel, Karl Otto — (1995) *¿Husserl, Tarski o Peirce? Por una teoría semiótico trascendental de la verdad como consenso.*, en Juan Antonio Nicolás y María José Frápoli (3), pp. 597-616. Versión original inédita (al menos hasta 1995): *¿Husserl Tarski oder Peirce? Für eine trazendentalsemiotische Konsenstheorie der Wahrheit.*

Habermas, Jürgen — (1973) *Teorías de la verdad,* en J.A. Nicolás y M. J. Frápoli (3), pp.543-595. Versión original: *Wahrheitstheorien* (1973) en Fahrenbach, H (editor) *Wirklichkeit und Reflexion,* Neske, Pfullingen, pp.211 –265.

Nicolás, Juan Antonio y — (1997)*Teorías de la verdad en el siglo XX*, Ed. Tecnos S. A. Madrid. Frápoli, María José, Editores

Piscoya, Luis — (2000) *El uso decreciente del concepto de verdad en la epistemología contemporánea*, contenido en Miguel Giusti, Editor (2000) *La filosofía del Siglo XX: balance y perspectivas,* Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima pp. 163-174

Popper, Karl — (1992) *Conocimiento objetivo*, Ed. Tecnos S.A. Madrid

Puntel, Bruno Lorenz — (1993) *Wahrheitstheorien in der neuren Philosophie*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Putnam, Hilary — (2001) *La trenza de tres cabos,* Siglo Veintiuno de España Editores, Madrid.

Rorty, Richard — (2000) *Verdad y Progreso*, Ediciones Paidos Iberica S.A. Barcelona.

Stace, Walter — (1965) *La refutación del realismo*, contenido en Salazar Bondy, Augusto (1965) *Lecturas filosóficas*, Ed. Educación Renovada, Lima, pp.452-461. La versión original se titula *The refutation of realism,* Revista **Mind** (1934). Posteriormente apareció en el libro del mismo autor *Modern Introduction to Philosophy* (1963), Free Press of Glencoe Inc.

Tarski Alfred — (1956) *The concept of Truth in formalized languages*, publicado junto a otros dieciséis artículos en *Logic, Semantics, Methamathematics , papers from 1923 to 1938 by Alfred Tarski* (1956), Oxford at The Clarendon Press, traducción de J. H. Woodger,

pp.152- 278. Una primera versión de este artículo fue presentada por J. Lukasiewicz a la Sociedad de Ciencias de Varsovia en 1931. La primera publicación en polaco apareció en 1933. La traducción alemana que incluyó un *Postscrip* se publicó en 1936 bajo el título *Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen* contenida en *Studia Philosofica*, volumen 1 (1936). La traducción de Woodger se basa en esta última versión.

(1944) La concepción semántica de la verdad y los fundamentos de la semántica, en Nicolás y Frápoli (3) pp.63-108. La versión original fue The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics, publicada en *Philosophy and Phenomenological Research*, IV, 1944, pp.341-375. (1969) «Verdad y Prueba», publicado en Luis Piscoya (2000) *Tópicos en Epistemología*, Fondo Editorial, Universidad Inca Garcilaso de la Vega, Lima, pp. 191-230.Traducción de L. Piscoya. La versión original es Truth and Proof, *Scientific American*, June 1969, Vol 220, Number 6, pp.63-77.

La racionalidad como no-arbitrariedad

El tema de la racionalidad como todos los temas filosóficos de envergadura plantea un riesgo permanente de imprecisión y vaguedad. Por ello, sin excluir otras posibilidades, hemos considerado que una manera justificable y productiva de particularizarlo para su tratamiento inicial es formularlo en términos de la racionalidad del discurso. Ello no conlleva que consideremos irrelevantes o erróneas otras entradas al tema, como por ejemplo, el examen de la acción racional, sino expresa básicamente que hemos optado por la opción más adecuada a nuestra perspectiva de análisis y que puede reclamar fundadamente una mayor generalidad.

Asimismo tratamos de eludir conscientemente toda interpretación o pretensión normativa en torno a la racionalidad. Nos proponemos ajustar nuestras conjeturas a lo que la racionalidad históricamente ha sido y es, y no a un deseado «deber ser». Evidentemente esto abre un debate en el que las pruebas concluyentes no tienen lugar, pero dentro del cual, sin embargo, es posible discriminar la fuerza justificatoria de los argumentos.

Partimos de la conjetura que sostiene que una aspiración permanente de los discursos filosóficos y científicos ha sido el ser racionales en el sentido de sujetarse a ciertos principios lógicos. Esto incluye aún a las posiciones llamadas irracionalistas que cuestionan a la razón como mecanismo explicativo último y a otras posiciones, como el escepticismo, cuyas tesis pueden ser entendidas en términos de que un análisis razonable conduce a desconfiar de la validez de nuestros conocimientos.

Para sugerir una vía de apoyo a nuestra conjetura inicial es suficiente señalar que la noción de contradicción lógica definida como la afirmación simultánea de una proposición y de su negación ha sido considerada tradicionalmente por los matemáticos como sinónima de absurdo y, consecuentemente, de irracionalidad. A dicha tradición no han escapado otros campos de la ciencia ni los filósofos. Aún quienes han enfatizado la contradicción en sentido ontológico e histórico han pretendido siempre hablar de ella de modo no contradictorio. Y hasta la fecha continúa siendo, probablemente, la manera más eficaz de contra-argumentar el demostrar que existe una contradicción en el discurso que se objeta.

Desde esta perspectiva, el pensamiento dialéctico, que es el que de modo inmediato podría mostrar reservas respecto de nuestro punto de vista, puede reclamar haber aportado una nueva imagen de la realidad pero no, en sentido estricto, una nueva manera de hablar de la realidad o nuevos principios que gobiernen el discurso filosófico. A juzgar por estudios de J. Zeleny y por datos proporcionados por una revisión formal de los textos correspondientes, los discursos marxistas y hegelianos, a la luz de nuestra definición de racionalidad, son tan aristotélicos como la geometría de Euclides.

Sin embargo, la cuestión planteada por los principios lógicos que gobiernan un discurso racional no es en modo alguno unívoca a pesar de la extraordinaria fortaleza de los principios aristotélicos de identidad, no contradicción y del tercio excluido, que están ligados, simétricamente, en la *lógica standard*, al modelo bivalente constituido por los valores verdadero - falso. Como es conocido ya, las modalidades aristotélicas no eran compatibles con el principio del tercio excluido y posteriormente, en nuestro siglo, las lógicas polivalentes de Lukasievic y Reichenbach, las intuicionistas de Heyting y Brouwer y los resultados en *Lógica standard* de Gödel pusieron definitivamente en mala situación la universalidad de dichos principios. En otras palabras, fue necesario admitir como discursos racionales a aquellos que no respetaban, estrictamente, uno de los principios clásicos. Asimismo, esta concesión debilitó la identificación de la contradicción lógica con la noción de absurdo debido a que la contraparte necesaria de una proposición contradictoria ya no resultaba una proposición verdadera. Esto, claramente, no melló la fuerza destructiva del principio de no contradicción pero sí su uso afirmativo a través de las demostraciones por reducción al absurdo. Dentro de esta tendencia la escuela intuicionista instauró el principio de constructividad y proscribió las demostraciones por reducción al absurdo, debido a que construyen una deducción que prueba la invalidez de una proposición de la forma **no-P** pero no aportan construcción alguna en favor de la validez de la proposición **P**. Esto relativizó la noción de demostración por reducción al absurdo al *language game* de la lógica clásica, por usar una expresión del segundo Wittgenstein, y le quitó el halo de validez sin condiciones que tuvo por más de 20 siglos.

Los resultados antes aludidos y otros hallados en el trabajo de axiomatización y reducción de teorías, han conducido a una convicción actualmente usual entre los especialistas: ella es que las nociones reclamadas como universales y necesarias por la filosofía tradicional son solo de validez contextual. Tal vez la más importante de ellas, en el campo sintáctico, sea la de axioma y, en el campo semántico, la de verdad, a cuyo esclarecimiento contribuyó decisivamente Tarski. No es este el lugar para examinar en detalle las implicancias de la definición del concepto de verdad de Tarski, sin embargo, podemos poner de relieve, en esta ocasión, el impacto demoledor que ha tenido su famoso teorema en aquellos cuyo optimismo ingenuo los condujo a buscar verdades apodícticas producidas por el conocimiento racional tal y como pretendió el pensamiento kantiano.

También han contribuido a convertir aún en más problemática la racionalidad, definida en términos de discurso que satisface ciertos principios lógicos, los trabajos de Da Costa y Routley, que son conocidos, con el beneplácito de sus autores, como investigaciones en lógica paraconsistente, tipificación debida a Francisco Miró Quesada C. La peculiaridad de estos sistemas lógicos respecto de los *standard* es que sus reglas de deducción no permiten la multiplicación desbordante de una contradicción en el caso de que esta se presente. Contrariamente, en los sistemas normales la presencia de una contradicción permite probar la negación de todas y cada una de sus proposiciones verdaderas. El ingenio de da Costa y de su escuela ha consistido en construir un aparato deductivo que mantiene la contradicción bajo control. Impide que haga metástasis y destruya el sistema, por usar una imagen que nos parece particularmente expresiva.

Los trabajos de Da Costa resultan novedosos y sorprendentes en tanto que posibilitan entender como racional a un discurso que incluye contradicciones lógicas tradicionales con

la condición de que sean omitidas las reglas que legitiman su multiplicación. Y la razón para justificar la omisión de tales reglas es que de otro modo el sistema sería trivial e inútil, pues sería incapaz de discriminar entre proposiciones falsas y verdaderas y, consecuentemente, sería inadecuado para portar información fiable alguna.

Lo dicho nos inclina a pensar que las condiciones de racionalidad del discurso admiten variantes significativas. Ello sugiere que los principios lógicos podrían ser las proposiciones de vigencia histórica más prolongada dentro del discurso racional pero no por ello definitivas. El tiempo transcurrido desde la invención de la lógica por Aristóteles podría no haber sido lo suficientemente prolongado para permitirnos percibir la historicidad de los principios lógicos. Sin embargo, hay indicadores de que no tienen por qué ser la excepción en la peripecia humana.

Empero, si deseamos rescatar alguna vigencia que, a pesar de las modificaciones ocurridas, nos sirva no como un principio sino como un criterio para identificar la racionalidad, una salida plausible puede ser recurrir al criterio de no-arbitrariedad. Este puede ser definido en el sentido de que un discurso es racional cuando excluye claramente algunas posibilidades y, en consecuencia, no todo en él es validamente afirmable. Esta noción no es exactamente equivalente, a la de consistencia lógica absoluta, que es la más comprehensiva que usan los especialistas, pues lo que pretendemos con la exigencia de no-arbitrariedad posee mayor generalidad que la consistencia clásica simple y la consistencia absoluta que solo son medios operacionales de garantizar la no arbitrariedad en los sistemas formalizados.

Lo antes propuesto puede considerarse como una condición necesaria de racionalidad del discurso pero no siempre como una condición suficiente. Es un hecho que la mayor parte de los discursos científicos pretenden decir algo de la realidad y con ello reclaman poseer lo que se llama contenido factual o empírico. En este sentido se advierte que el mero cumplimiento del requisito formal podría conducirnos a que admitamos como racionales discursos formalmente correctos pero triviales. Por ello es necesario en el caso de las ciencias empíricas, añadir como criterio de racionalidad la cantidad de información que porta un discurso, factor que parece estar ligado, de acuerdo a nuestra interpretación de los resultados de Shannon, al grado de seguridad del conocimiento. Las proposiciones más seguras son las más pobres en contenido informativo y, paradójicamente, las azarosas, son susceptibles de portar más información nueva. Esto significa que el criterio de relevancia informativa debe encontrar un punto de equilibrio, eligiendo prudentemente uno que se aleje de los enunciados aleatorios pero no al extremo de buscar máxima seguridad al costo de caer en la trivialidad. Otro riesgo dentro de este contexto, lo constituye la conocida propuesta de Popper que define el contenido empírico de un enunciado como su probabilidad inversa. De esta suerte el máximo contenido empírico corresponde a una proposición contradictoria, lo cual presenta obvios incovenientes si aceptamos, como sugiere Popper, que es objetivo de la investigación científica la búsqueda de las proposiciones de mayor contenido.

En medida significativa los criterios de no arbitrariedad y de cantidad de información, operacionalizados lógica y matemáticamente parece que se han corporizado, por decirlo así, en los circuitos eléctricos que constituyen la llamada inteligencia artificial del computador y en los métodos para medir la información que se almacena y procesa en unidades bits. De este modo no es casual la computarización de los procesos de investigación científica, pues el discurso científico y la máquina están inscritos dentro de la misma racionalidad.

Una tesis adicional, compatible con lo antes argumentado, podemos expresarla señalando que el principio de no arbitrariedad que proponemos puede ser considerado, inclusive, como portador de un criterio de racionalidad con implicancias ontológicas. Desde este ángulo la no arbitrariedad puede entenderse como una limitación para concebir al menos un mundo, o un estado de cosas o una entidad como posibles. Esto significa que un universo arbitrario y por tanto irracional sería justamente aquel en el que todo es posible sin exclusión alguna, en cambio un universo podría ser calificado de no arbitrario y de racional si y solo si satisfaciera la condición de regirse por una legalidad que excluye al menos un estado de cosas o algún tipo de entidad. El principio de uniformidad de la naturaleza de John Stuart Mill sería así solo un caso particular del principio de no arbitrariedad interpretado en términos ontológicos. La razón parece clara, Stuart Mill solo excluye de la naturaleza las sucesiones de eventos irregulares, lo cual es una posibilidad muy particular. Sin embargo, en principio, podría excluirse cualquier otra propiedad para satisfacer nuestra condición de no arbitrariedad.

Interpretando desde esta perspectiva la lógica clásica, que según conocidas exégesis tuvo en Aristóteles definidas implicancias ontológicas, puede sostenerse que su racionalidad consistió en concebir un mundo en el que todo era posible menos la contradicción. Este podría ser el sentido más interesante de una de las afirmaciones más conocidas del *Tractatus* de Wittgenstein que atribuye a la contradicción la propiedad de cerrar el espacio lógico. Otra manera de expresar la misma idea sería afirmar que la contradicción es el límite de lo posible.

Empero, considerando que los sistemas lógicos paraconsistentes operacionalizan el principio de no arbitrariedad con mayor amplitud, este hecho abre una nueva posibilidad para entender la racionalidad. En efecto, bajo esta nueva luz puede interpretarse que la racionalidad ontológica consiste en concebir un mundo en el que no todo es posible pero sí lo es la contradicción. Sin embargo, si restringiéramos nuestro criterio de racionalidad solamente al discurso y suspendiéramos todo juicio ontológico, entonces podríamos definir un sistema de lógica como una estructura simbólica que proporciona los esquemas más generales que expresan nuestra concepción de lo posible y que dotan de racionalidad a lo que denominamos conocimiento objetivo o conocimiento de lo real. Esta opción teorética, evidentemente, nos exime de comprometernos con la racionalidad o logicidad del mundo pero no de comprometernos con la de nuestro conocimiento de esta.

De otra parte, parece que no hay otro recurso que la costumbre para negarse a comprender y aceptar el condicionamiento histórico al que están sometidos nuestros sistemas de lógica y la posible caducidad de los mismos. Aunque mentes notables hayan sostenido la validez inconmovible y universal de la lógica clásica, que por más de 20 siglos ha sido, simplemente, la lógica, las lógicas paraconsistentes proporcionan en nuestros días razón suficiente para sospechar que la concepción clásica de lo posible y su correspondiente lógica están en proceso de transformación. Parecería que a la lógica le ha tocado sufrir en la presente centuria una transformación tan drástica como la que afectó a la geometría de Euclides, a mediados del siglo XIX con los hallazgos de Riemann y Lobachevski. Ello ciertamente, por ahora, no afecta significativamente a la praxis científica pero están ya dadas las condiciones para que en breve sean superadas o disueltas limitaciones que hasta hoy parecen naturales.

Una consecuencia más de lo anterior es que el principio de no arbitrariedad, operacionalizado lógicamente, también brinda la condición necesaria de racionalidad para la tecnología, cuya lógica subyacente es la misma que la de las teorías científicas, con las que comparte la misma concepción de lo que es posible. Sin embargo, en la medida que las reglas tecnológicas no describen sino prescriben un curso de acción sobre la realidad, entonces es necesario añadir como condición suficiente, para decidir su racionalidad, un criterio que permita evaluar en qué grado modifican los hechos en relación con objetivos praxiológicos.

El criterio antes referido es el de eficiencia. En efecto, decimos que una regla tecnológica o un sistema de reglas es eficiente cuando prescribe un curso de acción que conduce al logro del objetivo propuesto, en otro caso calificaremos a la regla o al sistema de reglas, según sea el caso, de ineficiente. Asimismo es un hecho conocido que *eficiencia*, a diferencia de los predicados alético-funcionales *verdadero-falso*, propios del nivel teórico, es un predicado graduable, en principio, a través de escalas que permiten medir grados de eficiencia. Son justamente estas escalas las que orientan los procesos de optimización, cuyo propósito es el logro de la máxima eficiencia posible, la cual se operacionaliza en términos de maximizar los beneficios con los mínimos costos.

Finalmente, pretendemos completar nuestra argumentación puntualizando que 'eficiencia' no es un predicado puramente descriptivo sino que conlleva una fuerte carga valorativa, en tanto está condicionado por los objetivos que nos proponemos lograr a través de los cursos de acción prescritos por las reglas. Y estos objetivos para ser socialmente relevantes deben ser, en algún sentido, buenos o valiosos.

La tesis anterior implica que un sistema de reglas tecnológicas que es eficiente bajo un sistema de valores puede ser inadmisible bajo otro. Por ejemplo el sistema de reglas para construir las cámaras de gas, que aplicaron los tecnócratas de Hitler, fue ciertamente considerado eficiente en relación con los objetivos del nacionalsocialismo. Sin embargo, en otro contexto valorativo, ese sistema de reglas carecería de sentido. En otras palabras, los sistemas de valores en tanto que establecen criterios de bueno funcionan como condiciones de posibilidad social de las tecnologías. Y este condicionamiento no solamente es práctico sino también lógico, pues el razonamiento que hace posible la obtención de una regla tecnológica consiste de una deducción cuyas premisas deben contener información científica vigente, que precise los marcos dentro de los cuales la acción humana es posible, pero, además, dichas premisas deben contener información sobre objetivos para que la regla tenga sentido o direccionalidad. Ahora, evidentemente, no hay manera de definir razonablemente objetivos sociales con independencia total de valores. Consecuentemente, la tendencia tradicional que sostiene la neutralidad valorativa de la tecnología carece de sustento práctico y lógico. Ciertamente tal pretensión, a la luz de este análisis, no pasa de ser un prejuicio.

IV. EPISTEMOLOGÍA DE LA TECNOLOGÍA

El compromiso valorativo de la tecnologia[88]

Este artículo pretende ser una reflexión filosófica sobre la tecnología entendida en términos contemporáneos, vale decir, dentro del contexto científico que contiene, al menos, teorías, metodologías, sistemas lingüísticos, instrumentos de laboratorio y de campo. Asimismo, concebimos, en general, la tecnología como una variedad del conocimiento científico que tiene sentido operante o transformador, y que se expresa por medio de formulaciones prescriptivas conocidas como reglas tecnológicas.

Nuestro análisis se apoyará básicamente en argumentos lógicos, aunque no necesariamente en formalizaciones. Intentamos probar de este modo algunas tesis que difieren significativamente de puntos de vista cuasi tradicionales que tienen semejanza con algunos otros menos convencionales en los resultados pero no en los mecanismos de prueba. En este segundo caso, nuestro aporte mínimo será reemplazar la aproximación intuitiva y difusa por el argumento explícito y riguroso.

Consideramos posiciones casi tradicionales, entre otras, aquellas que conciben la tecnología como una expresión altamente compleja del *homo faber*; que consiste esencialmente en la producción de instrumentos, maquinaria o artefactos que pueden utilizarse casi simétricamente para el beneficio o para el perjuicio, incluso el exterminio, de la especia humana. Dentro de esta concepción, los ingenieros aparecen como proveedores de artefactos o de información, como evaluadores de situaciones y proyectos; y los líderes sociales, empresariales o políticos, como los éticamente responsables de las decisiones (*policy makers*). Desde el punto de vista lógico, esta tendencia está asociada a aquella que tipifica las reglas tecnológicas como prescripciones pragmáticas, cuyo nivel no es de exigencia sino de recomendación y, consecuentemente, no entraña ni presupone compromiso ético valorativo alguno.

Otro punto de vista, no incompatible con el anterior, es el que sostiene que la capacidad de la tecnología para producir artefactos la convierte fundamentalmente en creadora de nuevas opciones que hacen realizable, a veces muy fácilmente, lo que antes era concebido como prácticamente imposible o, simplemente, ni siquiera imaginado. De esta manera, el «heracliteano» cambio tecnológico va creando formas de vida cada vez más complejas y ricas, que no pueden regirse ya por lo valores correspondientes a etapas anteriores que cada vez con mayor rapidez se tornan en obsoletos. Así, la tecnología contemporánea sería el motor del cambio de valores y la configuradora del futuro, aunque ella en sí misma no sea valorativa sino creadora de opciones.[89]

88 Versión actualizada del artículo públicado en *Crítica* Revista Hisponoamericana de Filosofia, Vol. XXIV / N.º 71. México, agosto 1992.

89 Un ejemplo de este punto de vista lo proporciona Emmanuel Mesthene (1983) «How Technology Will Shape the Future», en Carl Mitcham y Robert Mackey (comps.) *Philosophy and Technology*, The Free Press, pp. 116-129.

La tercera posición concibe la tecnología como fruto de un estilo especial de pensamiento calculante, que incluye también a la ciencia y a cierto tipo de filosofía, tal vez mayoritaria. Este pensamiento calculante sería a su vez represivo o bien encubridor de la genuina naturaleza humana, o bien del ser. De este modo, la tecnología sería el instrumento más poderoso de esta forma de pensamiento que, dada su cobertura y generalidad, puede ser considerado como ideología. Desde esta perspectiva, el compromiso de la tecnología con los valores dominantes es total y necesario, como lo es también el de la ciencia y el de la filosofía de cepa positivista y sus variantes. Sin embargo, por su inmensa capacidad operante, la tecnología, desde este punto de vista, se convierte en la más seria amenaza a los genuinos valores humanos.[90]

Por nuestra parte, asumiendo explícitamente que la tecnología puede ser adecuadamente examinada a través de las reglas tecnológicas que la expresan, sostendremos como tesis de este trabajo las siguientes:

1) El sentido prescriptivo de las reglas tecnológicas y los predicados eficiente- ineficiente que usualmente se les atribuye, tienen como fundamento último un conjunto de criterios de valor que son expresión de lo que se considera socialmente bueno.

2) El contenido informativo de las reglas tecnológicas se apoya en enunciados científico-teóricos, en algún sentido verdaderos, pero ello no significa que los segundos impliquen lógicamente a las primeras, salvo que se admita explícitamente premisas adicionales de carácter valorativo y una implicación no clásica o no estándar.

3) La dependencia de las reglas tecnológicas de los sistemas de valores ha sido soslayada debido al énfasis puesto en el artefacto y no en el lenguaje. Las tecnologías conductuales han puesto en evidencia la capacidad operante notable de los sistemas simbólicos y su parcialidad valorativa.

La argumentación en pro de la plausibilidad de las tesis propuestas la desarrollaremos en tres partes. La primera estará dedicada al análisis del lenguaje científico, que denominamos alético, para hacer los deslindes con el lenguaje no alético. Luego presentaremos el lenguaje de la tecnología, en términos de conjuntos de reglas de acción de naturaleza no alética. En la tercera parte, abordaremos lo relacionado con el compromiso valorativo de la tecnología como una consecuencia inherente a la naturaleza lógica de sus reglas.

El lenguaje científico alético

A pesar de la cautela de Reichenbach, Carnap y Tarski, entre otros nos enseñaron a guardar frente al concepto de verdad, consideramos que se puede asumir que un vasto sector del lenguaje científico está constituido por proposiciones o enunciados que en algún sentido son susceptibles de ser verdaderos o falsos. No necesitamos discriminar, en este caso, peculiaridades de los llamados enunciados teóricos, o de los de observación, ni discutir lo que el concepto de verdad pueda significar en términos de grado de confirmación o de probabilidad, ni tomar posición respecto del mayor o menor grado de provisionalidad de la verdad de los enunciados. Nos basta con señalar que las proposiciones «la proposición p es verdadera» y

90 Este punto de vista lo ilustran en medida significativa Martín Heidegger (1957) *Der Satz vom Grund*, Frigurgo, y Herbert Marcuse (1968) *El hombre unidimensional*, Barcelona, Editorial Seix Barral.

«la proposición p es falsa» son significativas dentro de numerosos contextos que constituyen el lenguaje científico y todos ellos, por satisfacer esta condición, los denominamos aléticos, y decimos que gozan de la propiedad de aleticidad.

Asimismo, dentro del nivel alético, definiremos una teoría científica como un conjunto **T** de proposiciones que satisface las siguientes condiciones: i) **T** contiene solo enunciados generales calificables de verdaderos; ii) **T** contiene un conjunto mínimo de enunciados que son verdaderos, pero no son lógicamente deducibles dentro de **T**; iii) no se conocen enunciados singulares interpretables como contraejemplos de algún enunciado de **T**; iv) para el menos un subconjunto no vacío de enunciados de **T**, se conoce un conjunto no vacío de enunciados singulares interpretables como ejemplos. Como se comprende, la generalidad de la definición anterior permite su uso sin mayores restricciones en las ciencias llamadas fácticas y en la matemática.

Decimos que una teoría **T** es predictiva, si con ayuda de sus enunciados y a partir de descripciones de estados de cosas interpretables como estados iniciales, se puede predecir o descartar la ocurrencia de estados de cosas interpretables como finales. Una teoría **T** es retrodictiva, si con ayuda de sus enunciados y a partir de descripciones de estados de cosas interpretables como estados finales, es posible la reconstrucción de presuntos estados iniciales. La aceptabilidad de una teoría científica con contenido empírico no exige el cumplimiento de las dos características anteriores. Así, por ejemplo, la teoría de la evolución en la biología y la teoría tectónica en la geología, que suscitaron dificultades epistemológicas cuando se intentó aplicarles la condición positivista de confirmación predicativa y la teoría popperiana de falsabilidad, que también es predicativa, no tendrían dificultades de aceptabilidad epistemológica en la medida en que puede bastarle ser retrodictivas.

Una teoría **T** hace inteligible un sector de la realidad si es predictiva o si es retrodictiva en la medida en que las deducciones lógicas correspondientes son interpretables como explicaciones. Sin embargo, no consideramos que estos requisitos sean criterios de cientificidad aditivos en el sentido de que es posible formular hipótesis de contenido pobre como «Todos los cuervos son negros» que son al mismo tiempo aceptablemente predictivas y retrodictivas mientras que hay otras solo retrodictivas pero con potencialidad para generar teorías de gran riqueza significativa, como la de la evolución, que han iluminado revolucionariamente nuestra comprensión de la realidad.

En la medida en que la tecnología se interesa esencialmente por la acción eficiente, las teorías relevantes para ella son las que ofrecen información precisa para saber a qué atenernos en una situación determinada. A la tecnología le interesa más la manejabilidad de las circunstancias que la comprensión de la realidad (tesis 3). Por ello, las teorías que son predictivas y retrodictivas, aunque pobres en contenido explicativo, son más aprovechables por la tecnología que construye artefactos (mecánica clásica) que las teorías que hacen inteligibles vastos sectores de la realidad (mecánica cuántica) pero que solo pueden ser difusamente predictivas con amplios márgenes de incertidumbre. Esto último puede justificar la aceptabilidad del psicoanálisis, a pesar de opiniones en contra tan respetadas como las de Popper y Bunge,[91] y explicar por qué existe una exitosa, aunque limitada, tecnología conductista.

91 La calificación del psicoanálisis de seudociencia se encuentra en Mario Bunge (1972) *La investigación científica*, Barcelona, Ariel, (Colección Convivium) vid 1.6. Antes ya la había hecho profusamente Karl Popper en *La lógica de la investigación científica*, Tecnos, Madrid, 1962. Se ratifica en *Unended Quest*, Open Court, Publishing Company, 1976.

Exitosa porque posee capacidad predictiva estadísticamente significativa y limitada porque se interesa metodológicamente solo en la relación de covariación entre propiedades de estímulos y respuestas observables (tesis 3) y no en la comprensión deductiva de las relaciones internas, no directamente tangibles, que pueden existir entre ellas. Lo anterior no presupone necesariamente que las teorías de contenido limitado pero preciso deban ser rivales de las teorías de mayor riqueza aunque de menor exactitud, pues es posible obtenerlas como particularizaciones de estas últimas; es el caso de la hidráulica con respecto a la hidrodinámica, como lo ha señalado M. Bunge.[92]

Consideramos que a los enunciados de las teorías científicas que satisfacen la caracterización anterior no les son aplicables, en sentido estricto, los predicados valorativos bueno-malo. De este modo, expresiones frecuentes, aun dentro del vocabulario de algunos filósofos de la ciencia como «teoría buena» o «teoría mala», pueden ser traducidas con ventaja por «teoría presuntamente verdadera» o «teoría verdadera» y por «teoría presuntamente falsa» o «teoría falsa». Esta traducción es propiamente una reducción estipulativa que elimina la carga subjetiva inherente a los predicados valorativos, los cuales resultan superfluos dentro del contexto científico teórico.

El uso estricto de «bueno» es inseparable de cierta exigencia de actitudes favorables, en el sentido de «tomar partido en favor de» o de «asumir una actitud o una posición en pro de». Para que nuestro punto de vista expresado en la tesis 1) sea válido, no es necesario que la exigencia anterior agote el sentido de «bueno» sino solo admitir que es un componente estable de dicho predicado cuando se usa en afirmaciones relevantes. Así, por ejemplo, la afirmación «la democracia es buena» puede ser traducida, sin sufrir desnaturalización, por «se debe tomar posición en pro de la democracia». Y esta traducción puede ser entendida en términos de que es sostenible la doble implicación: «Si la democracia es buena entonces se debe tomar posición en pro de la democracia, y si se debe tomar posición en pro de la democracia entonces la democracia es buena». Asumiendo la pertinencia de la traducción anterior, que desde Frege[93] es una equivalencia de significado más que de sentido, sería un despropósito caer en la tentación de traducir la oración «la teoría de la relatividad es buena» por la prescripción volitiva «se debe tomar posición en pro de la teoría de la relatividad». Esto nos lleva a eliminar el uso del predicado valorativo «bueno» del nivel alético, que es cognitivo y proposicional; y a sostener que cualquier aparición coloquial de dicho predicado que califica a enunciados o teorías es interpretable, adecuadamente, en términos de «verdadero».

La delimitación anterior puede justificarse, como tradicionalmente se ha hecho, puntualizando que las teorías son formuladas con la pretensión de decir «lo que realmente ocurre» o simplemente «lo que es». En este empeño nos proporcionan una imagen de la realidad, aunque ellas mismas en cuanto tales no sean imágenes de la realidad, sino sistemas o aparatos simbólicos que nos proporcionan pistas para hacerla inteligible. Consecuentemente, las teorías no abren discusión sobre «lo que debemos favorecer» o sobre «lo que debemos preferir», pues su sentido es explicativo y no prescriptivo.

En relación con expresiones que hablan de los objetivos malos o buenos de las investigaciones que dieron lugar a la formulación de una teoría, o de los medios buenos o vedados uti-

92 Mario Bunge, op. cit., p. 686.
93 G.Frege,G. (1980) *Funktion, Begriff und Bedeutung*, 5ª. Ed. Gotinga, Vandenhoeck und Reuprecht, pp. 40-65.

lizados en la realización de experimentos para contrastar hipótesis, en estos casos hablamos de las intenciones buenas o malas del investigador o de su conducta moral o inmortal, pero no del valor alético de los enunciados de la teoría que es independiente de las condiciones subjetivas, o de las peripecias conductuales del investigador. La responsabilidad social y moral es del investigador, no de la teoría.

El nivel de la eficiencia

Dentro del lenguaje científico, tomado en el sentido amplio, es posible distinguir el lenguaje de la tecnología, cuya característica relevante es ser prescriptivo y no explicativo. A la tecnología le interesa fundamentalmente solucionar eficientemente problemas prácticos con valor en el mercado de patentes, que se originan en las necesidades sociales. La satisfacción de estas necesidades constituye la meta que da sentido y dirección a la prescripción tecnológica que recomienda un curso de acción por el beneficio que produce. Por ello no le interesa la comprensión de la realidad, sino su manipulación o transformación para producir las soluciones buscadas con el menor costo y la mayor rentabilidad posibles.

El lenguaje de la tecnología está constituido por reglas de acción que según una propuesta de Mario Bunge[94] tienen la estructura **B** por **A**, que según él mismo se lee «**B** por medio de **A**» o también «para obtener **B**, hacer **A**». Este esquema recoge el sentido operante o instrumental de la regla tecnológica, pero es insuficiente para dar cuenta de su sentido normativo o prescriptivo que, ciertamente, Bunge no ignora sino que explícitamente reconoce. En efecto, con relación a las que él denominaba sin reservas teorías tecnológicas, afirma: «They are concerned with finding out what ought to be done in order to bring about, prevent or just change the pace of events or their course in a preassigned way».[95] Evidentemente, el sentido prescriptivo de «ought to» no deja lugar a dudas y es compatible totalmente con el punto de vista que se sostiene en el trabajo citado. Sin embargo, nos permitimos anotar que en la correspondiente versión española de Manuel Sacristán se usa la expresión «hay que», que debilita el sentido normativo de «ought to».[96] Asimismo, nosotros en este trabajo y en anteriores hemos preferido no usar el término «teoría tecnológica» por no parecernos el sentido explicativo de las teorías reducible al carácter eminentemente prescriptivo de la tecnología. En un trabajo posterior, Bunge ha preferido omitir tal término y sugerir la pertinencia de su uso como una cuestión problemática.[97]

Un análisis adecuado de la regla tecnológica debe realizarse a partir de un esquema lógico que recoja su especificidad prescriptiva. No es suficiente puntualizar que se logra **B** por medio de **A**, pues en la práctica pueden existir $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$,..., $\mathbf{A_n}$ para obtener **B**. Pero la regla tecnológica debe descartar los $\mathbf{A_i(1 \leq i \leq n)}$ que son lentos, laboriosos y costosos y prescribir concretamente un Ar específico para el logro de **B**.

Por otra parte, si bien la intención del logro de un objetivo explica adecuadamente el sentido prescriptivo de una regla tecnológica, no debería omitirse que los estados iniciales son importantes para comprender el contenido prescrito en situaciones particulares. Es claro que el logro de un mismo objetivo puede dar lugar a recomendaciones diferentes, si las con-

94 Mario Bunge, op. cit., p. 697.
95 Mario Bunge, «Toward a Philosophy of Technology», en Mitcham y Mackey (comps.) En *Philosophy and Technology*, p. 63.
96 *La investigación científica*, p. 686.
97 *Epistemología*, Ciencias Sociales, La Habana, 1982, p. 215.

diciones de partida son también diferentes. Debido a estas consideraciones, nosotros hemos propuesto como esquema general de una regla tecnológica el siguiente: «En las circunstancias **X** debe hacerse **Y** para **Z**».[98] De esta manera, resolvemos la cuestión planteada por el sentido prescriptivo de la regla tecnológica por medio de «debe», que en este caso tiene un sentido eminentemente instrumental. Igualmente, pensamos que dado un contexto específico, es suficiente con una formulación simplificada o elíptica del esquema anterior que omita la referencia a circunstancias. En tal caso bastará el esquema «Debe hacerse **Y** para **Z**».

Mantener explícito el carácter prescriptivo de la regla tecnológica es decisivo para establecer diferencias sustantivas con los enunciados que constituyen las teorías científicas. Así, por ejemplo, carece de sentido decir que una recomendación o prescripción para la acción sea susceptible de ser verdadera o falsa, pues ella solo puede ser seguida, cumplida, ignorada o transgredida por seres humanos. La regla tecnológica no se refiere directamente a hechos, en general, sino prescribe acciones o formas de conducta para el logro de objetivos. Si la acción prescrita conduce al logro del objetivo propuesto, entonces la regla correspondiente es eficiente, en caso contrario, la regla es ineficiente. La no aleticidad de las reglas consiste justamente en que ellas, debido a su sentido prescriptivo, no pueden ser calificadas de verdaderas o falsas sino de eficientes o ineficientes, lo que pone de relieve su carácter utilitario o pragmático. Al mismo tiempo, la dicotomía eficiente-ineficiente deja abierta la posibilidad, interesante desde el ángulo de las necesidades prácticas, de definir grados de eficiencia en términos métricos. Ciertamente, en la práctica concreta, la elección más frecuente parece ser no entre reglas eficientes e ineficientes, sino entre más eficientes y menos eficientes. Una teoría sobre los grados de eficiencia, sistematizada en términos del cálculo de probabilidades, tropezaría con menos dificultades que una teoría sobre los grados de verdad, que es lo que finalmente trató de hacer Reichenbach en su discutido y voluminoso trabajo *The Theory of Probability*.[99]

El grado de eficiencia de las reglas tecnológicas está fuertemente ligado al conocimiento científico-teórico disponible (tesis 2). No parece gratuito que las tecnologías más eficientes, como la electrónica, estén ligadas a los sectores de la ciencia teórica que ofrecen altos niveles de precisión y que tratan problemas que admiten soluciones mediante algoritmos. En concreto, es el caso de la tecnología de diseño de circuitos lógicos para computadoras, que aprovecha el álgebra de Boole. Sin embargo, una teoría altamente precisa y aplicable exitosamente a la tecnología no significa necesariamente una teoría cognoscitivamente rica. Esto acontece justamente con el álgebra de Boole, que es una estructura pequeña dentro de la lógica matemática pero tecnológicamente muy rentable.

El grado de eficiencia de las reglas tecnológicas, por consiguiente, descansa significativamente en el grado de exactitud y precisión con que están formuladas las proposiciones teóricas que le sirven de apoyo (tesis 2). Esto significa que para la tecnología, más interesante que la verdad misma de las proposiciones teóricas, es el lenguaje en el que están formuladas tales proposiciones verdaderas. Esto hace comprensible que las tecnologías más eficientes sean las que están conectadas con teorías expresadas en lenguaje matemático. Sin embargo, no pretendemos que el grado de eficiencia de una regla tecnológica se derive lógicamente del grado de precisión de ciertas proposiciones teóricas, ni menos de su verdad. Ello se debe

98 Piscoya, Luis (1974) *Sobre la naturaleza de la pedagogía*, Lima, Retablo de Papel Ediciones, INIDE.
99 Reichenbach, Hans (1949) *The Theory of Probability*, University of California Press.

a que parece artificioso separar la eficiencia del objetivo de la regla y hacerla depender exclusivamente de la calidad de la información científico-teórica. En efecto, la conexión entre grado de eficiencia y objetivo es clara, si se considera que la información científica útil para el logro de un determinado objetivo puede ser menos útil o menos relevante si modificamos el objetivo o lo sustituimos. Este nexo muestra que manteniendo constante la información científica que funciona como soporte de la regla, expresada por medio de la acción que ésta prescribe, modificaremos significativamente su grado de eficiencia si modificamos su objetivo de la misma. Inclusive puede argumentarse que si modificamos el objetivo de una regla, entonces ya estamos hablando en sentido estricto del grado de eficiencia de otra regla. Un argumento favorable a nuestra tesis 2.

Lo antes sostenido no es incompatible con que el grado de eficiencia de una regla tecnológica pueda usarse como elemento de juicio en favor de la verdad de una determinada proposición científico-teórica.

Prescripción tecnológica y valores

En la sección anterior, hemos aportado argumentos probatorios de que el grado de eficiencia de la regla tecnológica está asociado a la precisión y exactitud de determinados enunciados científicos y a la naturaleza del objetivo que da sentido teleológico a la regla en referencia. En esta sección, intentaremos probar centralmente nuestra tesis 1 sosteniendo por un lado, que lo que explica el nexo entre los grados de eficiencia y la naturaleza del objetivo es el sentido prescriptivo de la regla y, por otro lado, que el sentido prescriptivo de la regla es independiente en medida significativa de la información teórica y dependiente principalmente del objetivo que se desea alcanzar.

Iniciaremos nuestro análisis con un ejemplo. Una formulación aceptable de una regla tecnológica puede ser la siguiente: «En circunstancias en las que estemos ante pacientes no especialmente alérgicos, debe aplicárseles estreptomicina para curar la tuberculosis». Podemos suponer que esta prescripción se funda en que la investigación médico-farmacológica ha establecido que hay una especie de ajuste entre el medio y el objetivo o fin. Esta relación de ajuste instrumental se funda, en este caso, en una relación causal: en el sentido de que la estreptomicina produce un proceso de destrucción de los bacilos de Koch. Sin embargo, la conexión causal no implica prescripción alguna, pues ella nos informa que la estreptomicina destruye los bacilos de Koch, pero esto no implica que debamos tener interés en curar a los enfermos de tuberculosis. Es más, poniéndonos en una hipotética situación maligna, no necesariamente extraña a nuestra experiencia histórica, podríamos utilizar esta información para impedir que seres enfermos de tuberculosis se curen si lo que nos importa es exterminarlos. Consecuentemente, prescribimos estreptomicina bajo las circunstancias descritas, porque deseamos curar la tuberculosis, esto es, nos interesa la supervivencia de los afectados. Y es en la medida en que asumimos tal objetivo como válido que tiene sentido decir «debe». Por tanto, la investigación bioquímica explica la conexión causal y el ajuste entre medios y fines, pero no el «debe» que es el elemento que da sentido prescriptivo a la regla. Y este sentido prescriptivo nos permite hablar de la eficiencia, en tanto que esta expresa la capacidad misma para lograr un objetivo y pierde sentido si se independiza de él.

El análisis del ejemplo anterior explica suficientemente que en tal regla el uso de «debe» está justificado por el objetivo o fin. Podría contra-argumentarse diciendo que nuestras conclusiones no poseen generalidad significativa debido a que hemos escogido un ejemplo ad hoc que le otorga un especial nivel de exigencia al «debe», por tratarse de un fin que, más que práctico, es moral. En cambio, si se recurriera a un ejemplo como el que presenta Mario Bunge en el trabajo antes citado, la situación sería muy distinta.

Utilizando nuestro esquema, el ejemplo referido puede reformarse así: «En condiciones de un aceptable control experimental, debe mantenerse un cuerpo por debajo de su punto de Curie para mantenerlo imantado». En este caso, se trataría de una regla tecnológica presuntamente más representativa que la propuesta por nosotros, porque el objetivo de mantener un cuerpo imantado es totalmente pragmático y carece de resonancia moral alguna.[72]

Sin embargo, esa contra-argumentación sería inexacta. El fin puede ser entendido en términos puramente utilitarios, pragmáticos, inmediatistas o de otro modo. Para nuestro punto de vista, es suficiente que se admita, como lo hacen aun los pragmatistas radicales, que el fin es deseado sin importar por ahora las razones. La deseabilidad del fin nos obliga a expresarnos en términos de prescripciones o recomendaciones. De no ser así nos bastarían los enunciados; pero está suficientemente admitido que con ellos describimos y no prescribimos. Consideramos que desconocer esta delimitación no resolvería problema alguno y crearía grandes confusiones.

La deseabilidad del fin puede entenderse como algo fundado en su bondad. Esto es, todo fin u objetivo de la acción humana es deseado en tanto se considera bueno en algún sentido. Resultaría una incoherencia en términos de la razón práctica afirmar «**X** es malo y yo deseo **X**», pues la deseabilidad de **X** es indicadora de que en algún otro respecto, no hecho explícito, se considera bueno. Por consiguiente, es la bondad del fin el fundamento del sentido prescriptivo de las reglas tecnológicas (tesis 1), aunque ello no implica que tal bondad sea siempre de la misma naturaleza ni que todas las reglas obliguen de la misma manera. Por otra parte, no es válido identificar todas las formas de «debe» con un sentido moral, pues aunque la afirmación «toda forma «debe» moral es una forma de «debe» ligada a valores» es válida, la inversa «toda forma de «debe» ligada a valores es una forma de «debe moral» no está implicada por la primera.

El análisis anterior pone en evidencia que las relaciones entre tecnología y criterios de bueno son insoslayables, debido a que tal vínculo se desprende de la naturaleza misma de las reglas tecnológicas. El hecho de que tal temática no haya recibido el tratamiento que merece puede deberse a que las tendencias tradicionales ven la tecnología a través de los artefactos que produce y no a través de los sistemas de reglas que hacen posible la construcción de tales artefactos (tesis 3). Asimismo, las cuestiones relacionadas con la transferencia de tecnología son con frecuencia discutidas desde el ángulo de la transferencia de maquinarias o de la concesión de patentes de fabricación. De este modo, quedan encubiertas propiedades que resultan de reconocimiento ineludible cuando el analista se dirige hacia el lenguaje de la tecnología tesis 3).

100 Mario Bunge, *La investigación científica*, p. 696.

El papel decisivo que cumplen nuestros criterios de bueno en nuestra concepción de la tecnología es detectable si nos remitimos a la experiencia social. Así, puede explicarse por qué no reconocemos a Josef Mengele como un tecnólogo sino como un genocida, mientras para el Partido Nacional Socialista alemán era un científico muy respetable por su capacidad para construir eficientes máquinas de exterminio. Lo que explica tan importante diferencia es que nuestros criterios de bueno difieren sustancialmente de los dominantes en el Tercer Reich. Y la razón por la que los trabajos de Mengele se realizaron es porque existió un sistema de valores que permitió calificarlos de tecnología. De este modo, la conexión de los objetivos de las reglas tecnológicas con los criterios de bueno no es casual, en la medida en que ellos funcionan como condición de posibilidad para el desarrollo de la tecnología. Y si bien es cierto que esta ligazón es especialmente visible en casos extremos como el mencionado, ello no impide que esté subyacente en las tecnologías posibilitadas por los criterios de bueno comunes a sistemas de valores diversos. Esto significa que cuanto más diferentes son los sistemas de valores de dos comunidades, tanto más difícil es la transferencia de tecnología entre ellas.

Naturalmente, la validez de nuestro aserto, que hemos denominado tesis 1, no presupone que los tecnólogos sean conscientes de este condicionamiento. Muchos de ellos se sentirán «más allá de la libertad y de la dignidad» o «más allá del bien y del mal».[101] Empero, no tener conciencia de la ocurrencia de un proceso no suprime su existencia ni los riesgos que puede conllevar.

A fin de proporcionar una prueba completa de nuestra tesis 1, a continuación trataremos de delinear la reconstrucción racional de la inferencia tecnológica o de la deducción tecnológica en un sentido muy próximo al que propuso Reichenbach[102] hace ya más de 50 años. Nos proponemos construir la deducción que hace posible la obtención de reglas tecnológicas, aunque ella no se inscriba dentro de la lógica clásica. Esto no quiere decir que los tecnólogos propongan reglas por medio de un proceso lógico explícito, sino que es posible construir una especie de artificio para hacer lógicamente inteligible su proceder.

Partiremos del hecho de que si la regla tecnológica tiene sentido prescriptivo, entonces nos encontramos ante una deducción con una conclusión formulada en términos de un «debe» que en alguna medida está condicionado valorativamente, aunque no necesariamente moralmente, como se desprende de nuestro análisis. Asimismo, la interpretación pragmatista, instrumental o utilitaria de «debe», como creemos haberlo demostrado, no es independiente del concepto de bueno. La presencia de una conclusión normativa nos trae reminiscencias de la vieja «guillotina de Hume», que advertía la imposibilidad de la referida conclusión desde premisas formuladas en términos de «es». La reformulación de esta prohibición establecería la imposibilidad de la conclusión prescriptiva desde premisas formuladas en términos de «es» y de «si..., entonces...», pues las hipótesis que forman parte de una teoría tienen forma lógica condicional y solo los informes de observación pueden ser formulados mediante enunciados básicos en términos de «es». Esta actualización de la estructura de la inferencia respecto del estado de la Lógica en los tiempos de Hume, sin embargo, no cambia la prohibición en lo fundamental. No parece tampoco justificable el paso de «si..., entonces...» más enunciados básicos a «debe».

101 Aludimos indirectamente a los libros publicados bajo tales títulos por B.F. Skinner y Friedrich Nietzsche.
102 H. Reichenbach (1961) *Experience and Prediction*, The University of Chicago Press, p. 8 y ss. La primera edición es de 1938.

La manera más simple de superar la dificultad sería establecer una mediación entre «si..., entonces...» «es» y el «debe» de la conclusión. Ello sería viable mediante la adición de una premisa valorativa en términos de «debe» y de la aceptación explícita de que todo enunciado valorativo, relevante en términos de «bueno», tiene capacidad para justificar la acción tendiente al logro o a la realización de aquello considerado bueno.

De esta manera, una deducción tecnológica reconstruida sería una estructura constituida por: i) hipótesis científicas que portan información teórica relevante; ii) al menos un enunciado valorativo formulado en términos de «bueno», iii) enunciados observacionales, básicos o protocolarios y iv) una regla de acción denominada regla tecnológica como conclusión obtenida a partir de i), ii), y iii). A las reglas de deducción natural usualmente aceptadas habría que añadirles una regla de deducción que establezca que un enunciado valorativo en términos de «bueno» posibilita la deducción de una prescripción en términos de «debe». Ciertamente, el contenido específico de «bueno» se define dentro de un contexto que admite una jerarquización de lo valioso. Asimismo, no presuponemos en modo alguno la validez de los criterios de bueno que usa el tecnólogo, sino que señalamos que su razonamiento tiene entre sus fundamentos algún concepto de bueno. Por añadidura, tampoco estamos sugiriendo que la justificación lógica sea al mismo tiempo justificación moral, pero el tratamiento de este último tema excede los alcances de este trabajo.

Si nuestra reconstrucción del razonamiento tecnológico es correcta, contamos con un argumento fuerte para sostener nuestra tesis, que así no solo tendría el apoyo del análisis de la experiencia social realizado antes. De este modo, estaríamos probando que en las bases racionales de la tecnología hay una decisión valorativa, consciente o no, que la compromete en sus fundamentos mismos con un determinado sistema de valores y que, en consecuencia, el viejo problema de la neutralidad valorativa de la tecnología puede estar solucionado negativamente, aunque esto disguste a los tecnólogos puros.

En breve, no es lógicamente posible una tecnología más allá del bien y del mal.

Humanismo, ciencia y globalización

Antecedentes

En la primera sección de esta conferencia, cuyo tema me fue sugerido por el organizador de este seminario de investigación, trataremos de precisar los antecedentes históricos más inmediatos que explican el interés que suscitan los conceptos que constituyen el título. Entre ellos tiene especial resonancia el término *Globalización* debido a que se usa abundantemente, en los últimos 10 años, en documentos científicos, políticos y en la propaganda que producen las empresas que hacen *marketing*.

El término *Humanismo* adquirió especial relevancia en los círculos académicos filosóficos, en la década posterior a la finalización de la Segunda Guerra Mundial. Dos filósofos altamente citados en la época, Jean Paul Sartre y Martin Heidegger, escribieron los artículos titulados *El existencialismo es un humanismo* y *Carta sobre el humanismo*, respectivamente. En términos generales, el énfasis en el tema de estos artículos puede entenderse como una reacción ante la inhumanidad que se consumó en los campos de batalla y de concentración en los que cayeron, aproximadamente, 50 millones de personas, poniendo las mayores cuotas la ex Unión Soviética y Alemania.

Después de casi medio siglo de repercusiones académicas y públicas puede considerarse que el artículo de Heidegger ha tenido mayor impacto en las comunidades filosóficas occidentales. Ello podría deberse a múltiples factores sobre los que no es necesario abundar en esta conferencia. Es suficiente poner de relieve que el sentido del artículo de Heidegger es insistir en un humanismo que no centra su atención en el *homo humanus* de los griegos, del cristianismo, de Erasmo o de Marx sino en un humanismo, en caso de que se decida conservar el término, que centre su atención en lo que el llama el pensar la «verdad del ser». Para ello, según esta tesis, es necesario rescatar el lenguaje y el pensar de su ligazón con el ente en tanto que el lenguaje es la «casa del ser».

Como comprenderá el lector, las expresiones de Heidegger que han causado febriles entusiasmos y enérgicos rechazos en los medios filosóficos, tienen el carácter de un mensaje metafórico y literario que se entronca más con el estilo de pensamiento de Nietzsche o Hólderling que con el discurso claro, preciso y lógico de Descartes o Kant. Para lo que nos interesa probar en esta conferencia es suficiente señalar que si algo es inteligible con claridad en la obra de Heidegger, es su tesis que responsabiliza a Aristóteles por inventar la lógica y a la ciencia occidental matematizada por haber encubierto y desviado la esencia del *Dasein* y la verdad del ser. Sin embargo, pese a que Heidegger habla del ser y del *Dasein* como si se tratará de sujetos capaces de brindar apertura, liberar mensajes y constituir el núcleo mismo de la reflexión filosófica, hasta donde estoy informado, nunca se ha preocupado por demostrar que el ser es algo más que una forma verbal y que el *Dasein* es algo más que una expresión alemana que traducida al castellano significa «ser aquí».

Lo antes afirmado me excusa de entrar en detalles sobre lo que opino del pensamiento de Heidegger que es, además, coincidente con lo que piensan la casi totalidad de los filósofos de la ciencia, contemporáneos, de los que tengo conocimiento. Lo que cuenta en este caso es que asumiendo como premisa lo que he dado por inteligible en Heidegger, resulta entendible por qué no solamente él sino también muchos de sus simpatizantes han responsabilizado al pensamiento científico occidental y a la tecnología, que ha generado, de las atrocidades de la guerra, las cuales son explicadas como expresiones del dominio de la técnica sobre el hombre que, de este modo, se habría convertido en víctima de la llamada *razón instrumental.*

De otro lado, discrepan drásticamente con el pensamiento heideggeriano quienes desde la Ilustración han considerado que es el desarrollo científico y tecnológico el que ha producido los mayores beneficios a la especie humana construyendo ciudades con agua potable y luz eléctrica, superando plagas y enfermedades infectocontagiosas que cíclicamente diezmaban seriamente a la población del planeta, construyendo artefactos que han convertido en tolerable o agradable el trabajo por la subsistencia, el transporte y las comunicaciones. Asimismo, ello habría sido posible a través de la creación de un estilo de pensamiento crítico y analítico, regido por una metodología de la investigación diseñada para aprender de los errores y que no se somete a ningún otro tribunal que no sea el de la razón. Toda esta corriente de pensamiento que en sus orígenes descubrió los errores del antropocentrismo y del geocentrismo y que luchó contra el pensamiento mágico religioso sumergido en el misterio, echando las bases de la tolerancia y sembrando cautela sobre las verdades oficiales de todo tipo, es considerada el motor histórico de lo que se ha llamado inicialmente «Primera revolución mundial» (Alexander King), «Tercera ola» (Alvin Toffler), «Sociedad informática» (Adam Schaff), «Aldea global» (McLuhan) y, finalmente, «Sociedad globalizada» o, simplemente Globalización. Este último concepto presupone, sin mayor explicación de sus ideólogos, que se ha producido una integración a nivel planetario de la que no es posible ni razonable sustraerse. La nota característica de este cambio estaría dada por el hecho de que en la nueva sociedad global cuenta prioritariamente, como valor supremo, el conocimiento o la información (a través del mercado de patentes), razón por la que esta fase del desarrollo histórico correspondería estrictamente a la denominación *Sociedad del Conocimiento* o *Sociedad de la Información.*

Relaciones explícitas entre los tres conceptos

En esta sección examinaremos las relaciones conceptuales que sugieren de manera inmediata los conceptos materia de esta conferencia.

El *humanismo*, pese a las críticas de Heidegger, sigue ligado al *homo humanus* a través de la actualización y fortalecimiento de la doctrina de los derechos humanos como un punto de vista que defiende valores fundamentales que son inherentes a la persona humana sin excepciones. Sin embargo, el énfasis normalmente está puesto en la lucha contra toda forma de gobierno calificable como dictadura. A favor de esa posición, se argumenta que son las dictaduras las que producen torturas, desapariciones forzadas, censuras a la libertad de expresión y, frecuentemente, genocidios. La asociación exclusiva entre la vulneración de los derechos humanos y las dictaduras, a la luz de la experiencia contemporánea, resulta inexacta e interesada. En el Perú constituye un ejemplo aleccionador el conflicto social desencadenado en 1980 y que duró aproximadamente 15 años, dando lugar a que gobiernos instaurados a

través de la democracia electoral hayan estado ligados a violaciones infamantes y aún impunes de los derechos humanos, como lo ha probado, en medida significativa, la Comisión de la Verdad, aunque haya señalado muy insuficientemente a los grandes resposables políticos.

El concepto de globalización se ha hecho muy fuerte después de la caída del muro de Berlín aunque ha tenido teóricos anteriores entre los representantes del Club de Roma. Sus conexiones más inmediatas, sin embargo, no están ligadas explícitamente a la metáfora de la tierra como nave de capacidad limitada sino al mercado global o sin fronteras y a la democracia electoral como el mejor de los gobiernos posibles. El énfasis está puesto en los beneficios que recibirían potencialmente todos los miembros de la especie humana por su participación en un mercado sin fronteras arancelarias en el que se disolverían las distancias entre compradores y vendedores y todos, en ejercicio de su libertad, podrían decidir lo que más conviene a sus intereses, aprovechando las ventajas de la libre competencia y de la amplitud creciente de la oferta. Todo lo que se requiere para la participación plena en este mercado global es la presencia de sujetos razonables capaces de solucionar sus conflictos consensualmente dentro de márgenes ofrecidos por un nuevo contrato social rousseauniano que se denomina ahora Tratado de Libre Comercio, aunque en nuestros medios de comunicación hegemónicos y en los círculos gubernamentales tiene visos de un nuevo evangelio.

El énfasis en la democracia electoral está dado por el rechazo a toda forma de paternalismo o de dictadura, aunque no de teocracia (las monarquías también pueden ser democráticas). El principio fundamental es «cada persona un voto» y las decisiones se toman por mayoría. Pese a los grandes errores históricos y a mayorías como las representadas por el nazismo, se sostiene que la democracia electoral, con sus limitaciones, es la mejor de las formas de gobierno y un valor en sí misma independientemente de la heterogeneidad económica, cultural, social, etc. de la población. Sin embargo, es relevante anotar que con los recientes éxitos electorales sucesivos, avalados por observadores de organismos internacionales, de los gobiernos nacionalistas de Hugo Chavez y Evo Morales en Venezuela y Bolivia, la democracia electoral ha cedido espacio al libre mercado como escenario perfecto de libertad y properidad. A ello se suma, la libertad de prensa, postulada como libertad efectiva de todas las personas para emitir mensajes a través de los medios de comunicación de masas y que es proclamada y reclamada como derecho de sus propietarios y dependientes para actuar sin más limitaciones que las que establecen los códigos penales y la autocensura. Asimismo, estos nedios de comunicación no tendrían, según sus organizaciones de propietarios, responsabilidad educativa alguna porque su función es informar o distraer pero no educar, razón por la que deben mantenerse fuera de la jurisdicción de toda forma de autoridad educativa.

El concepto de ciencia lo abordaremos a través de la expresión *sociedad del conocimiento*. Comenzaremos puntualizando que esta última expresión, en sus relaciones inmediatas, aparece mucho más ligada a la tecnología que a las ciencias básicas o a las ciencias sociales. Adicionalmente, los sectores preferidos para establecer vínculos están representados preferentemente por la tecnología de la información, la biotecnología y la nanotecnología o tecnología de la miniaturización. En el sector de la tecnología de la información es ubicable la presencia del computador y la del *software*. El primero, conocido también como *hardware*, es el artefacto cuyo uso ha producido los cambios más importantes en todos los órdenes de la vida contemporánea: la investigación científica, la industria, el transporte, los servicios administrativos estatales y privados, la medicina, la educación, el sistema financiero, etc.

El *software* ha abierto una nueva dimensión en la actividad humana con la introducción de los lenguajes de máquina que han posibilitado la comunicación entre el hombre y la máquina, la máquina con otra máquina y la máquina con el hombre. Asimismo, esta comunicación se ha realizado con rapidez creciente de tal suerte que las velocidades de transmisión ya son próximas a la velocidad de la luz. Este factor ha convertido en innecesario el desplazamiento de las personas de un lugar a otro debido a que la información viaja hacia ellas a una velocidad que, por ahora, es prohibitiva para los humanos. En muchos casos cotidianos, el que una persona en Lima observe en la pantalla del televisor lo que está ocurriendo en la plaza Trafalgar en Londres, equivale a que en algún sentido esa persona se ha desplazado del punto **A** al punto **B** sin pasar por los puntos intermedios, en tanto que no necesitó moverse de su sitio para observar directamente lo que ocurre a 10 000 km de distancia. Estos efectos son los que han afianzado en la vida cotidiana la idea de globalización y pueden ser los causantes de la confusión que se experimenta entre rapidez en la transmisión de información y participación efectiva en el mercado globalizado. Puede estar ocurriendo que los niveles de participación activa hayan decrecido aunque la velocidad de transmisión de los mensajes y, principalmente de las imágenes haya crecido sorprendentemente.

La biotecnología ha producido mediante la ingeniería genética cambios a través de la manipulación de los genes y de la clonación que han dado lugar a que algunos autores hablen de una post-humanidad o del fin del hombre. El temor a los usos inmorales de la biotecnología ha generado la necesidad de pensar en mecanismos de control que eviten atentados contra lo que se considera la naturaleza humana o la dignidad humana. Dado el hecho de que los estados nacionales tienen legislaciones con márgenes de libertad distintos, se tiende a pensar que la única vía es el control internacional a través de acuerdos intergubernamentales que generen organismos internacionales análogos a los que están a cargo del control de la energía nuclear. Dentro de este contexto, aparece como indiscutible la necesidad prioritaria de una bioética que aporte las normas legales y morales que deberían respetarse en la sociedad globalizada. El poder de la biotecnología se extendería a la posibilidad de incrementar las ya agudas diferencias sociales existentes en occidente, dando lugar a una eugenesia capaz de producir físicamente nuevas generaciones con un perfil preestablecido a voluntad de los padres. Las prácticas nazis sobre la materia se convertirían así en un antecedente menor por haber carecido de la tecnología de la información, de la farmacotecnología y de la miniaturización, elementos de los que hoy disponemos cada vez con mayor accesibilidad y por menores precios.

Relaciones subyacentes

En esta sección abordaremos las relaciones que existen entre estos conceptos, las cuales no figuran, explícitamente, en los escenarios en los que se los usa intensivamente como ideas fuerza de eslogan políticos, publicitarios o de moda académica posmoderna, pero no como expresiones descriptivas, explicativas o elucidatorias. En este caso realizaremos el análisis a partir de la perspectiva que abre el concepto de globalización.

La idea de un mercado global conlleva, sin declararlo, la eliminación de las fronteras nacionales y el consecuente debilitamiento de los estados nacionales periféricos. Este proceso implica la transferencia de las propiedades y bienes de la nación a las empresas

trasnacionales, a través de la privatización y de las capacidades y potestades del Estado a la llamada sociedad civil a través de la tercerización, la misma que se cumple instrumentando contratos de servicio con empresas trasnacionales o con organismos no gubernamentales (ONGs). Este proceso de transferencia se realiza bajo la hipótesis de que el Estado es intrínsicamente un mal propietario y un pésimo administrador, de tal suerte que su función debe ser solamente reguladora y promotora. A lo anterior se añade la tesis que sostiene que en el mercado global el bien supremo es el conocimiento mientras que los recursos naturales, la salud y el empleo son cuestiones de menor importancia. Los principios activos de la aldea global serían la libre competencia, la libertad para elegir, el libre ejercicio de la prensa y el escrupuloso respeto a la privatización del conocimiento a través del derecho de patentes protegido por los tratados de libre comercio.

Lo anterior encubre numerosos hechos algunos de los cuales ejemplificaremos:

• Las condiciones de participación en el mercado global de los estados centrales y de los estados periféricos son abismalmente desiguales. La lógica del desarrollo de la economía liberal ha conducido a un mundo cada vez más desigual con un 20% de la población mundial que consume aproximadamente el 80% de los recursos naturales agotables. Esto significa que el número de pobres se ha incrementado en los últimos 40 años no solo en los países periféricos sino también en los países centrales. Uno de sus indicadores es el creciente desempleo que comenzó a hacer crisis en Alemania y que ha hecho explosión con el crack de Wall Street con repercusiones globales todavía difíciles de dimensionar. Las distancias económicas entre los países pobres y los países centrales y entre los habitantes ricos y los habitantes pobres de los países «en desarrollo» tienden a incrementarse en tanto el denominado mercado global potencia la inequidad por la creciente desigualdad en la capacidad de intercambio.

La sociedad humana siempre ha sido del conocimiento en el sentido de que es la capacidad de aprender de los errores, de acumular información y de transferirla la que le ha dado ventaja al *homo sapiens*, pese a su debilidad física, no solo para sobrevivir sino también para depredar a las otras especies y a la naturaleza. Sin embargo, en términos de la sobrevivencia de la especie, la posesión de los recursos naturales sigue siendo decisiva para el mantenimiento de los estándares de vida de los globalizadores y para el control de las pretensiones de los globalizados. Ello explica por qué EE.UU. de Norteamérica ha invadido Irak, y por qué los estados centrales privilegian la industria de la guerra, permanecen armados hasta los dientes y tienen su mayor fortaleza económica en la industria pesada de las armas, aunque las cifras estadísticas al respecto no sean especialmente accesibles. Resulta muy claro que la mayor preocupación de la administración G. W. Bush no fue el conocimiento sino el petróleo. En todo caso, el conocimiento es solo un medio para mantener una posición hegemónica en lo que puede llamarse hasta la fecha, con más propiedad, la sociedad de los hidrocarburos.

La tecnología que finalmente permite definir posiciones en el mercado globalizado es la tecnología de la producción de armas de destrucción masiva como son las armas nucleares y las armas microbiológicas y químicas. Es la posesión de armas nucleares la que da derecho de veto a un miembro del Consejo de Seguridad de la Organización de las Naciones Unidas, lo que equivale a instituir como norma inapelable del derecho internacional a la ley de la selva que concede al más fuerte el estatuto de estar más allá del bien y del mal. Asimismo, le

concede la potestad de impedir por la fuerza que un advenedizo pretenda entrar en el club de los fuerte. Esa es la lógica que explica que haya sido la acusación de posesión de armas químicas, gratuita hasta la fecha, la que ha servido como pretexto para invadir y ocupar Irak hasta la fecha En este caso, como en otros, la tecnología de información es solamente un apoyo para perfeccionar y potenciar las tecnologías de la guerra.

Las premisas anteriores permiten entender por qué en la sociedad de los globalizados solo tiene sentido la democracia formal y el discurso «inclusivo» pero no tiene lugar el derecho a la salud, al trabajo, a la educación y a los salarios dignos. De todo ello están excluidas las mayorías de los países periféricos, las cuales ejercen el derecho a votar en condiciones de inhumanidad. Pero este estado de cosas puede mantenerse todavía porque hay una tecnología del manejo de los medios de comunicación que modela las ideas, creencias y deseos a gusto del planificador. De este modo, las mayorías de los países periféricos normalmente pueden elegir a quienes ya están previstos como ganadores por los controladores del mercado global. Para ello se cuenta además con el apoyo de los filósofos al servicio del poder y del partido «democrático», tipo Fukuyama, Habermas o Heidegger, cada cual en su momento y en su lugar. Ellos se han encargado de que en la mentalidad colectiva de la llamada sociedad civil el concepto de verdad haya sido reemplazado por el de consenso y el de justicia por el de competitividad. De esta suerte las grandes mayorías marginadas asimilan la falsedad o la manipulación como diferencias de intereses, igualmente respetables, y la injusticia como insuficiente capacidad para competir en el *laissez faire*.

Asimismo, para los conductores de la globalización no es un hecho desconocido que la mente humana (no el cerebro), descontando la denominada lotería natural representada por los genes, es principalmente una construcción cultural desarrollada sobre una especie de sistema operativo representado por la lengua materna. Esta construcción cultural es, en términos estadísticos, moldeable en grandes números pero no a nivel de individuos específicos. Esta hipótesis permite explicar por qué los expertos en *marketing* pueden predecir con éxito que cubrirán el 40% del mercado aunque no sepan los nombres de sus compradores. De manera análoga se planifica una candidatura política y se condiciona, con mucha aproximación a los valores previstos, la «libre» preferencia de los electores. Hitler ya conocía bastante bien, en la práctica, estos resultados aunque haya sabido mucho menos que hoy el *porqué*. Los progresos en la tecnología del condicionamiento operante, neuroquímica, inteligencia artificial y tecnología de la información permiten, hoy día, la globalización planetaria de las estrategias, perfeccionadas, que usó Hitler a través de Göbbels y *der Deutsche Rundfunk*.

Universidad, investigación y globalización

El análisis anterior posibilita una reflexión sobre la misión de la universidad peruana en el denominado contexto de la globalización. Las negociaciones del gobierno norteamericano con el gobierno peruano para la suscripción de un Tratado de Libre Comercio (TLC) han creado un marco dentro del cual tiene un lugar privilegiado el concepto de competitividad. Los sectores que alientan con entusiasmo la suscripción sin dilaciones del TLC, en sus argumentaciones suelen invocar los ejemplos de México y Chile para poner en evidencia los supuestos beneficios que obtendríamos los peruanos si se consuma la firma del referido tratado.[103]

103 En la fecha el TLC USA-Perú ya está firmado y aprobado por el Congreso de la República.

Considerando que el principal factor que gravita sobre la competitividad es el conocimiento tecnológico, el *know how*, a la universidad le tocaría potenciar la capacidad del sistema productivo peruano para que pueda aprovechar las ventajas comparativas ofrecidas por la libre participación en el mercado norteamericano. Este sería un reto que, según los entusiastas negociadores del TLC, podría asumir con éxito la universidad peruana a través de sus centros de investigación que podrían producir el *know how* para que los productos peruanos de bandera puedan lograr precios muy favorables en el mercado norteamericano. De esta suerte la industria textil que utiliza la lana de los camélidos de altura y las empresas dedicadas a los espárragos, las alcachofas, los mangos y al pisco peruano podrían incrementar sus exportaciones, dar más trabajo y pagar mejores salarios. Todo ello bajo la hipótesis que sostiene que solo es posible mejorar la calidad de vida si hay crecimiento económico visible a través de un mayor PBI.

Lo que no dicen los entusiastas negociadores del TLC es cuánto tendrán que pagar los peruanos, a cambio, por los derechos de patente aplicables a las medicinas de marca que reemplazarán a las genéricas y a los paquetes de *software* que tendrían que ser sometidos a un control estricto a cambio de la apertura del mercado norteamericano. Lo mismo cabe preguntarse de las patentes de alimentos industrializados, que se elaboran con recursos naturales peruanos pero que se encuentran registrados por la legislación norteamericana o de los países de la OCDE. Es claro que el gobierno de Washington no se interesaría en que suscribamos el TLC si es que los términos de intercambio les fueran desfavorables o favorables pero no suficientemente atractivos. La razón obvia es que los beneficios por exportar productos agrícolas o textiles constituyen una fracción muy pequeña de las cifras que se pagan por el uso de patentes en el campo médico, por citar solo un ejemplo. Asimismo, tampoco cuenta para los inversionistas, especialmente mineros y en hidrocarburos, la destrucción del medio ambiente y de un número nunca precisado de vidas humanas que son el costo oculto que no se descuenta del crecimiento del PBI.

Lo relevante de lo anterior para esta conferencia es que ningún país produce tecnologías de punta, que son las que generan las patentes más rentables, sin tener una larga tradición de investigación básica que ha permitido la creación de dichas tecnologías y que funciona como soporte de sus innovaciones y desarrollo. Por ejemplo, resulta ininteligible la capacidad de crecimiento, pertinencia e innovación de la empresa Microsoft si se ignora el volumen y calidad de la investigación básica en lógica matemática y en física de los nuevos materiales desarrollada en EE.UU. entre 1920 y el presente. La actual tecnología de Microsoft, la digitalización, se apoya en la lógica matemática de la década de los años 30 producida por Kurt Gödel, Alonzo Church, Stephen Kleene, Claudio Shannon, Alan Turing, etc. Igualmente las poderosas industrias farmacéuticas norteamericanas y alemanas serían inexistentes sin la larga cadena de premios Nobel por trabajos en física, química, fisiología, bioquímica y neuroquímica que han ganado los investigadores de dichos países en los últimos 70 años.

En consecuencia, cabe preguntarse ¿qué probabilidad tiene un país que realiza una cantidad mínima de investigaciones en ciencias básicas de producir *know how* que lo convierta en competitivo con el mercado norteamericano? La respuesta, en términos negativos, es clara si consideramos que pese a que el gasto en la educación superior como porcentaje del PBI creció de 0.54% en 1970 a 1.78% en el año 2002, el coeficiente de invención decreció de 0.07 a 0.01 entre 1977 y el año 2002. Asimismo, la inversión en investigación y desarrollo

que era el 0.36% del PBI en 1976 decreció al 0.102% en el año 2002 y en la fecha es el 0.01%. La tasa de dependencia tecnológica calculada sobre 14 países del hemisferio indica que el Perú tiene un 25.95 de tasa de dependencia, factor que lo coloca, según cálculos hechos en el año 2000, como el segundo país más dependiente de América Latina. Sus niveles de dependencia son mayores que los de todos los países de América del Sur y Centroamérica y, en materia de publicaciones científicas registradas en el *Science Citation Index* (SCI) ocupamos el penúltimo lugar (al 2003) en Sudamérica, superando solamente a Paraguay. Los índices anteriormente señalados han dado lugar a que el Foro Económico Mundial del año 2002 haya ubicado al Perú en el lugar N° 54 de la comunidad internacional por su bajo Índice de Crecimiento de la Competitividad (Fuente: *Perú ante la sociedad del conocimiento*, CONCYTEC 2003). En el año 2008 el Perú ha ocupado el lugar 48 en el mismo ranking, pero en Salud el lugar 86,en Educación 84 y en participación en el ingreso y oportunidades en el lugar 83. La política económica neoliberal, muy apreciada por los empresarios reunidos en Davos, nos dio en este rubro el lugar 19.

Justamente, considerando la importancia de tener actualizado el índice de logro tecnológico (*Technological Achievement Index*, TAI), el PNUD realizó un estudio sobre 32 países incluidos dentro de los planes de negociación del TLC. El Perú alcanzó un TAI de 0.271 ocupando el penúltimo lugar, ligeramente por encima de Indonesia. El índice logrado por EE.UU. en esa misma tabla es de 0.733. Para esa diferencia notable cuenta el hecho de que EE.UU. según información del *International Monetary Fund* (2003) cubre el 15% del comercio mundial mientras que el Perú solamente el 0.1%. La pregunta inmediata es ¿puede competir en condiciones ventajosas el mercado peruano con otro que es 150 veces mayor? La respuesta parece obvia y, considerando los antecedentes anteriores, es muy poco lo que la universidad puede hacer con su centro de investigación, modestos en capital humano y,más aún, en recursos financieros, para afectar este estado de cosas.

De otra parte, existe en nuestras universidades la idea de que el desarrollo científico y tecnológico de un país depende estrictamente de sus departamentos de Ciencias básicas y de Ingeniería. Este prejuicio se encuentra subyacente en una publicación del Concytec titulada *Perú: programa de promoción y Evaluación de la calidad de los estudios de Postgrado en Ciencia y Tecnología*, PECED que se dedica exclusivamente a informar sobre seminarios y talleres de posgrado en Ciencias e Ingeniería, realizados por ocho universidades peruanas que cuentan con estos campos de especialización.

Al mismo tiempo, dicha selección es compatible con el hecho de que Concytec solo financia investigaciones en Ciencia y Tecnología excluyendo casi totalmente los campos de las ciencias sociales y de la educación. Ciertamente, esta decisión política es poco realista si se tiene en cuenta que la producción científica de un país está muy influida por el contexto del sistema de educación básica que tiene a su cargo el desarrollo de las vocaciones y de las capacidades que requiere el desarrollo científico y tecnológico. Ello significa que es muy poco lo que puede hacerse para mejorar la producción de ciencia y tecnología en un país sin tener conocimiento alguno de la calidad de los conocimientos científicos que se imparten a los niños y adolescentes, tema que está dentro del campo de la investigación educacional pero que es una condición necesaria para el desarrollo científico del país en su conjunto, tarea que compromete planes de largo plazo y que no debería ser dejada de lado con el argumento burocrático de que ello corresponde al Ministerio de Educación.

Sin embargo, la situación es aún más compleja. Si tomamos en consideración el criterio de la correlación y la covariación entre dos fenómenos, ocurre que en las universidades más calificadas del mundo, que ocupan los 20 primeros lugares en el ranking publicado en el año 2003 por la Universidad Jiao Tong de Shanghai y en el ranking publicado por *Times* de Londres en el año 2004, no solo sus departamentos de Ciencias, Biomedicina e Ingeniería ocupan los primeros lugares del mundo sino también sus departamentos de Ciencias Sociales, de Artes y Humanidades. Esto podría estar significando que si algo es importante en la globalización es la interdisciplinariedad y la interacción entre los diferentes campos del conocimiento. Ello permitiría entender por qué la Universidad de California en Berkeley es el centro más calificado del mundo en ingenierías, por encima del MIT, y simultáneamente ocupa el tercer lugar en el mundo, en el desarrollo de las ciencias sociales, las artes y las humanidades. Dentro de esta lógica no resulta casual que Noam Chomsky, el más notable lingüista del siglo XX y el más duro crítico de la política exterior de Washington D.C, sea al mismo tiempo jefe de Departamento en el Instituto Tecnológico de Massachussets.

V. LÓGICA MATEMÁTICA

Lógicas no-clásicas:

Los cálculos C_n de Newton C.A. da Costa [104]

El campo de las denominadas lógicas no-clásicas se ha expandido notablemente en los últimos cincuenta años y uno de los primeros problemas que suscita es el referente a su definición. Así, en nuestro medio Francisco Miró Quesada C. (1978) ha propuesto como criterio de definición el grado en el que un sistema lógico S satisface los tres principios lógicos tradicionales. Si **S** satisface los tres, es clásico y si **S** no satisface al menos uno de ellos, es no-clásico. En este sentido las lógicas intuicionistas de Brouwer y Heyting no serían clásicas por prescindir del principio del tercio excluido y los sistemas de Da Costa tampoco serían clásicos por omitir el principio de no contradicción en su formulación tradicional. Asimismo, las lógicas modales tampoco serían clásicas ya que en sentido estricto los principios lógicos tradicionales han sido definidos para lenguajes categóricos o asertóricos.

Lewis (1918) es uno de los primeros en interesarse en distinguir un sistema clásico de otro que no lo es, en términos distintos a los usos imperantes en su época. En efecto, en sus tiempos se usaba el predicado «clásico» para atribuirlo a la lógica aristotélica y diferenciarla de la lógica matemática que se encontraba en una etapa de consolidación. Sin embargo, a él ya no le interesaba esta distinción sino la que podía establecerse entre el sistema de *Principia Mathematica*, de Whitehead y Russell, y su sistema de implicación estricta. Desde esta nueva óptica, un sistema **S** era clásico si usaba la implicación material como ocurría con el cálculo proposicional de *Principia Mathematica* o si satisfacía los postulados del álgebra de Boole y Schröder reformulados por Huntington (1904). Y un sistema **S** era no-clásico si era construido a partir del concepto de implicación estricta, con el mismo que en su propuesta contenida en *Survey of Symbolic Logic*, Lewis intentó eliminar dos teoremas «indeseables» admitidos por la implicación material. El primero se refiere a que una proposición falsa implica a cualquier proposición y el segundo a que una proposición verdadera es implicada por cualquier proposición. Asimismo, Lewis sostuvo que el sistema de implicación material de *Principia Mathematica* se podía derivar como un caso particular de su sistema de implicación estricta, como puede apreciarse en la página 314 de la obra antes citada.

Un criterio distinto es el que ha usado Patrick Suppes (1966). Él ha definido como clásicas las estructuras booleanas y de este modo un sistema **S** es no-clásico cuando no satisface al menos uno de los axiomas de Huntington. En su trabajo *The Probabilistic Argument for a Non Classical Logic of Quantum Mechanics* propone que un sistema de cálculo de las probabilidades, para el cual no siempre se cumple que dadas dos probabilidades existe la probabilidad producto de ambas, sea denominado no-clásico debido a que en el álgebra de Boole para cualquier par de clases siempre existe su producto. Asimismo, la lógica subyacente

104 Publicado anteriormente en *Logos Latinoamericano* (1994) Revista del Instituto de Investigación del Pensamiento Peruano y Latinoamericano. Año 1. Lima. pp. 38-47.

de dicho cálculo de las probabilidades, consecuentemente, también debe ser considerada no-clásica. Y, en este caso concreto, Suppes propone que se la denomine lógica cuántica por ser la más adecuada para resolver las discusiones generadas por las interpretaciones alternativas de la desigualdad de Heisenberg en mecánica cuántica.

Lo hasta aquí expuesto muestra que la noción de lógica no-clásica carece de significación unívoca dentro de los medios especializados. Un sistema S no-clásico según el criterio de Suppes, puede ser sin dificultades clásico según el criterio de Miró Quesada. Y si debilitamos este último suprimiendo la exigencia de un lenguaje asertórico, entonces el sistema de implicación material de Lewis también puede ser definido bajo esta condición como clásico. Sin embargo un sistema intuicionista, como el de N. Kolmogorov (1925), que construye un tipo de «Seudomatemática» en la que todas las aplicaciones «ilegítimas» del principio del tercio excluido, en la matemática ordinaria, son reemplazadas por '$\neg\neg A \rightarrow A$', sería no-clásico según el criterio de Miró Quesada pero sería clásico según el criterio de Suppes porque en dicho sistema se puede reproducir los axiomas del cálculo de las probabilidades con estructura booleana.

El hecho de que un mismo sistema lógico pueda ser tipificado como clásico o no según el punto de vista que se adopte, nos obliga a precisar el sentido en el que usaremos en esta exposición el predicado 'no-clásico'. Diremos que un sistema **S** es no-clásico cuando omite el clásico principio de no contradicción dentro del conjunto de sus esquemas válidos y omite dentro del conjunto de sus reglas de deducción aquella que afirma que desde una fórmula y su negación puede deducirse cualquier fórmula. Esta definición es compatible con sistemas no-clásicos como los cálculos C_n de Da Costa que no contienen como teorema a '$\neg(A \wedge \neg A)$' y con sistemas no-clásicos como el de Routley y Meyer (1976) que incluye como uno de sus axiomas a '$p_o \wedge \neg p_o$' y como teoremas un conjunto infinito enumerable de contradicciones de la forma '$p_m \wedge \neg p_m$'.

Existe una variedad de sistemas lógicos contemporáneos que son no-clásicos en el sentido antes referido. Entre ellos puede mencionarse el de Asenjo y Tamburino (1975), los de da Costa (1963-1974), los de Rescher y Brandom (1980), los de Routley y Meyer (1976), los de Arruda y Da Costa (1964 y 1977), entre otros. Todos ellos han sido construidos dentro de una tendencia que reconoce entre sus precursores a Bochvar (1939), Vasiliev (1912) y a Jaskowski (1948). Asimismo, a los sistemas que hemos definido como no-clásicos tiende a conocérselos en la comunidad internacional, cada vez en mayor medida, como sistemas paraconsistentes, denominación debida a Francisco Miró Quesada.

Dentro de este amplio repertorio hemos elegido como materia de este estudio los sistemas C_n de Da Costa para $1 \leq n < \omega$, los mismos que se encuentran delineados en su publicación *On the Theory of Inconsistent Formal Systems* (1974). Las variantes C_n, C_n^* y $C_n^=$ para $0 < n \leq \omega$ denotan respectivamente, conjuntos de cálculos proposicionales, conjuntos de cálculos de predicados de primer orden sin igualdad que son expansiones de los anteriores cálculos proposicionales, y conjuntos de cálculos de predicados de primer orden con igualdad que son expansiones de los C_n^*. Para el caso n=0 se tiene el cálculo proposicional clásico, el cálculo de predicados de primer orden clásico sin igualdad y el cálculo de predicados clásico de primer orden con igualdad. De este modo el primer cálculo no-clásico es C_1 y sus propiedades son generalizables a C_n para $1 \leq n < \omega$.

Las características generales de los cálculos C_n para $1 \leq n < \omega$. son las siguientes:

Los referidos cálculos pueden ser dotados de una semántica trivalente como ocurre en la versión de 1974, o también pueden ser dotados de una semántica bivalente como ocurre en la versión titulada *Une Sémantique pour le calcul C_1* escrita con la colaboración de A. Arruda. Lo importante consiste en definir reglas de construcción de matrices para las que '$\neg(A \wedge \neg A)$' y '$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$' no sean esquemas válidos, lo que impide que en C_1 sea válida la regla de deducción que afirma que desde una contradicción se puede derivar cualquier fórmula, la misma que tiene plena vigencia en C_0. En efecto, en los cálculos clásicos si se produce una contradicción, utilizando el segundo de los esquemas anteriores y el *Modus Ponens*, se deduce legítimamente cualquier fórmula.

El concepto principal que decide la aceptabilidad lógica de los cálculos $\mathbf{C_n}$ es el de no-trivialidad. Un cálculo $\mathbf{C_n}$ es no-trivial si es absolutamente consistente, en otro caso es trivial. Como es conocido, un sistema S cualquiera es absolutamente consistente si existe al menos una fórmula F en S la cual no es deducible en S. En otras palabras, un sistema S es absolutamente consistente cuando el conjunto de sus fórmulas no coincide con el conjunto de sus teoremas. En cambio un sistema S es simplemente inconsistente cuando desde S puede deducirse tanto una fórmula A como su correspondiente negación $\neg A$, en caso contrario S es simplemente o clásicamente consistente.

Lo que se enfatiza con la construcción de los sistemas C_n es que la deducción de fórmulas contradictorias no es en sí misma lógicamente negativa como fue presupuesto en los sistemas clásicos. Lo que crea dificultades en estos sistemas con las fórmulas contradictorias es el hecho de que en ellos existe además una regla de deducción que autoriza a derivar cualquier fórmula a partir de una contradicción. De esta suerte un sistema clásico que contiene una fórmula contradictoria carece de valor como instrumento de conocimiento porque desde él es posible derivar con igual legitimidad fórmulas interpretables como afirmaciones falsas y fórmulas interpretables como afirmaciones verdaderas. Esto es lo que da Costa llama un sistema trivial en el sentido de inútil o improductivo para el análisis de las teorías científicas.

Los cálculos C_n están orientados a neutralizar la trivialidad y no a eliminar las fórmulas contradictorias. Para ello es suficiente suprimir la regla de deducción antes citada y no admitir como esquema válido '$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$'. De este modo puede decirse que los cálculos C_n son tolerantes con las contradicciones.

Los cálculos C_n contienen la mayor parte de las reglas de deducción de los clásicos, denotados por C_0. Por usar una imagen que no desnaturaliza las cosas, los cálculos C_n son como recortes progresivos operados sobre C_0 de tal manera que C_{n+1} es más débil que C_n en el sentido que el primero está contenido en el segundo porque todo esquema válido de C_{n+1} también es válido en C_n, pero no la recíproca. La justificación de este recorte sería que permite elaborar instrumentos que por su fineza ponen al descubierto propiedades de las teorías que se desperdiciarían si usáramos un sistema clásico.

Los sistemas C_n introducen una notación abreviada para el principio de no contradicción y a partir de ella introducen como un nuevo concepto el de negación fuerte. Para el caso C_1 la fórmula '$\neg(A \wedge \neg A)$' es abreviada por A^o y la negación fuerte es introducida a través de

la definición $\neg(*)A$ = def. $\neg A \wedge A^{o}$. Asimismo, una fórmula de tipo '$A \wedge \neg (*)A$' trivializa al sistema C_1. Además si para $A^{oooo...o}$ utilizamos la abreviatura $A^{(n)}$, entonces tenemos que, en general, cada fórmula del tipo '$A \wedge \neg(n\text{-}1)A$' trivializa C_n. Y se dice que un sistema es finitamente trivializable cuando existe una fórmula F que añadiéndola como axioma trivializa S. En este sentido puede demostrarse que los cálculos C_n son finitamente trivializables.

Asimismo, una consecuencia inmediata de lo anterior es que los cálculos C_n más débiles son más trivializables que los más fuertes. Esto es visible a partir del hecho que '$A \wedge \neg(n\text{-}1)A$' trivializa C_n pero no C_{n+1}.

Los cálculos C_n son simplemente consistentes pero esto no entra en contradicción con la definición que hemos dado de sistema no-clásico. La razón es que aunque los cálculos C_n son simplemente consistentes su peculiaridad radica en que ellos permiten trabajar sobre sistemas, como algunas teorías de conjuntos, que contienen contradicciones pero que se puede presumir razonablemente que no son triviales. Si analizáramos tales teorías de conjuntos asumiendo como instrumento C_0 tendríamos que descartarlas y de este modo podríamos estar desperdiciando algunas de sus propiedades que pueden ser relevantes para el conocimiento. Por tanto, es decisivo distinguir entre las propiedades de los cálculos C_n y las propiedades de los sistemas a los que es aplicable un cálculo C_n cualquiera. En el trabajo materia de este estudio da Costa aplica $C_1^{=}$ a una teoría de conjuntos denominada NF_1, la misma que es simplemente inconsistente pero presumiblemente no trivial. Sin embargo es posible construir conjuntos de fórmulas Γ de $C_1^{=}$, denominados conjuntos de Henkin, que podrían tener propiedades interesantes pero ellos mismos podrían ser consistentes o no, en la medida que sus elementos están definidos como fórmulas de $C_1^{=}$ y no como sus teoremas (Da Costa y Arruda, 1977).

En los cálculos C_n es completamente posible llevar adelante demostraciones indirectas a través de una modificación adecuada de la regla de demostración por Reducción al Absurdo (RAA). Para el caso de C_1 su formulación es:

Si
$$\Gamma, A \vdash B^{0}$$
$$\Gamma, A \vdash B$$
$$\Gamma, A \vdash \neg B^{0}$$
Luego
$$\Gamma \vdash \neg A$$

En el caso de C_n para $2 = n < \omega$:

Si
$$\Gamma, A \vdash B^{(n-1)}$$
$$\Gamma, A \vdash B$$
$$\Gamma, A \vdash \neg^{(n-1)} B$$
Luego
$$\Gamma \vdash \neg^{(n-1)} A$$

En general, como lo señala expresamente Da Costa, en los cálculos C_n se cumplen todas las otras reglas de deducción establecidas en el libro de Kleene titulado *Introduction to Metamathematics* (1952).

Presentación del cálculo C_1. [2]

Los axiomas de C_1 son los siguientes:

$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

$(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow (A \rightarrow C))$

$A, A \rightarrow B \therefore B$

$A \wedge B \rightarrow A$

$A \wedge B \rightarrow B$

$A \rightarrow (B \rightarrow A \wedge B)$

$A \rightarrow A \vee B$

$B \rightarrow A \vee B$

$(A \rightarrow C) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \vee B \rightarrow C))$

$A \vee \neg A$

$\neg \neg A \rightarrow A$

$B^{o} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$

$A^{o} \wedge B^{o} \rightarrow (A \wedge B)^{o}$

$A^{o} \wedge B^{o} \rightarrow (A \vee B)^{o}$

$A^{o} \wedge B^{o} \rightarrow (A \rightarrow B)^{o}$

Los teoremas más distinguidos son los siguientes:

Teorema 1. En C_1 se cumplen todas las reglas de deducción del cálculo proposicional de *Introduction to Metamathematics* de Kleene excepto la de RAA que debe ser reformulada como se ha indicado antes.

Teorema 2. Los siguientes esquemas válidos de C_0 no son válidos en C_1

1. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

2. $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

3. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

4. $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg B)$

5. $A \wedge \neg A \rightarrow B$

6. $A \wedge \neg A \rightarrow \neg B$

7. $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A)$

8. $A \rightarrow \neg \neg A$

9. $(A \leftrightarrow \neg A) \rightarrow B$

10. $(A \leftrightarrow \neg A) \rightarrow \neg B$

11. $\neg (A \wedge \neg A)$

12. $((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B$

13. $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

14. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

15. $A \leftrightarrow \neg \neg A$

Para probar este teorema es suficiente construir matrices correspondientes a una función de valuación **v**, la misma que va de C_1 en el conjunto {1,2,3}, y que está definida de la siguiente manera:

v $(A \wedge B) = 3$ si, y solamente si, **v** $(A) = 3$; o **v** $(B) = 3$; en todos los demás casos v $(A \wedge B) = 1$

v $(A \vee B) = 3$ si, y solamente si, **v** $(A) =$ **v** $(B) = 3$; en otro caso **v** $(A \vee B) = 1$

v$(A \rightarrow B) = 3$ si, y solamente si, **v** $(B) = 3$ y **v** $(A) \neq 3$; en otro caso **v**$(A \rightarrow B) = 1$

v $(\neg A)=3$ si, y solamente si **v** $(A) = 1$; en otro caso **v** $(\neg A) = 1$

Asimismo, una fórmula A cualquiera del cálculo C_1 es lógicamente válida si siempre **v** (A)=1 para toda valuación posible de sus componentes.

Teorema 3. Todas las reglas de deducción y esquemas válidos del cálculo proposicional clásico C_0 que no contienen negación alguna se cumplen en C_1. Asimismo, si se añade a C_1 la fórmula 'A^o' se obtiene C_0. Por ejemplo, si al esquema 14 del teorema 2 le añadimos en el antecedente la fórmula 'B^o' obtendremos un esquema válido y esto puede hacerse adecuadamente en todos los demás casos. (Advertimos que estamos usando indistintamente la palabra fórmula y la palabra esquema en este contexto).

Ciertamente usamos la definición usual de '$\leftrightarrow$', lo que nos exime de definir la valuación correspondiente.

Teorema 4. Si $A_1, A_2, \ldots\ldots, A_m$ son las primeras fórmulas componentes del conjunto Γ y A es una fórmula cualquiera , entonces $\Gamma \vdash A$ en C_0 si y solamente si , $\Gamma, A_1^o, A_2^o, \ldots, A_m^o \vdash A$ en C_1. Intuitivamente esto significa que una fórmula cualquiera A es deducible en C_0 si, y solamente si, A es deducible en C_1 añadiéndole adecuadamente el principio de no contradicción a este cálculo.

Teorema 5. La negación fuerte '$\neg$ *' en C_1 tiene todas las propiedades de la negación clásica. Así en C_1 se cumplen como teoremas, entre otras, las siguientes fórmulas:

$\vdash A \vee \neg * A$

$\vdash \neg * (A \wedge \neg * A)$

$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg * B) \rightarrow \neg * A)$

$\vdash A \leftrightarrow \neg * \neg * A$

$\vdash \neg * A \rightarrow (A \rightarrow B)$

$\vdash (A \leftrightarrow \neg * A) \rightarrow B$

Teorema 6. El cálculo C_1 es simplemente consistente.

La idea para entender la prueba de este teorema es clara si se considera que cada axioma de C_1 es un esquema válido en el sentido de que cada valuación de un axioma cualquiera es siempre igual a 1. Asimismo la regla de deducción que es el *Modus Ponens* (axioma 3) garantiza que si el antecedente posee valor 1 el consecuente también toma valor 1 debido a que B no puede ser fórmula atómica (Es claro que las fórmulas atómicas no son derivables en C_1 porque asumen también el valor 3). En consecuencia si B es deducible en C_1 su negación clásica $\neg B$ no lo es porque es un esquema, en este caso, cuya valuación es siempre igual a 3. Evidentemente, también es necesario para entender este argumento observar que si B no es fórmula atómica, entonces su matriz de valuaciones carece de valor 2.

Teorema 7. El cálculo C_1 es finitamente trivializable.

Cada fórmula del tipo $A \wedge \neg * A$ trivializa C_1 lo cual es comprensible si se considera la aplicación casi inmediata del teorema 5, fórmula 5. Intuitivamente, esta fórmula expresa que desde una contradicción con negación fuerte se sigue cualquier fórmula en C_1 lo que significa que de producirse tal contradicción el cálculo C_1 queda trivializado.

Los cálculos C_n para 1

La jerarquía de los cálculos C_n para **1** puede ser descrita a través de la secuencia $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Las fórmulas del tipo $A^{oooo\ldots o}$ en las que el símbolo 'o' aparece **m** veces se escribirán abreviadamente A^m. Bajo estas condiciones los postulados de C_n coinciden con los once primeros postulados de C_1 pero los cuatro últimos deben ser reemplazados por los siguientes:

$B^{(n)} \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A))$

$A^{(n)} \wedge B^{(n)} \rightarrow (A \wedge B)^{(n)}$

$A^{(n)} \wedge B^{(n)} \rightarrow (A \vee B)^{(n)}$

$A^{(n)} \wedge B^{(n)} \rightarrow (A \rightarrow B)^{(n)}$

Teorema 8. Todos los cálculos pertenecientes a la jerarquía $C_0, C_1, \ldots, C_n$ son finitamente trivializables. La idea intuitiva de la demostración es la misma que la sugerida en el caso del Teorema 7, sino que con un mayor grado de generalidad que puede ser logrado por inducción matemática. También es importante señalar que C_ω no es finitamente trivializable y que, por ejemplo, la conocida ley de Peirce '$((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$' que es válida en C_n $\boldsymbol{o}$, no es válida para C_ω.

Teorema 9. Los cálculos C_n son decidibles. Este resultado es atribuido a Fidel quien ha demostrado que para cada cálculo C_n existe un algoritmo que permite decidir de manera efectiva si una fórmula A cualquiera es o no un teorema.

Teorema 10. Los resultados del teorema 2, válidos para C_1, son generalizados a C_n para $\boldsymbol{2} \leq n < \omega$

Teorema 11. El teorema 4 del C_1 es generalizable a $\boldsymbol{2} \leq \boldsymbol{n} < \boldsymbol{\omega}$.

Teorema 12. El teorema 6 es generalizable a C_n, $\boldsymbol{2} \leq \boldsymbol{n} < \boldsymbol{\omega}$. Este resultado también se cumple para C_ω y como es conocido, para C_0.

Terminamos esta sección señalando que, en general, los resultados que son válidos para C_1 son generalizables sin limitaciones a C_n para **2**.

El cálculo C_1^*

Como se ha indicado antes, a los cálculos proposicionales $C_1, C_2, ..., C_n, ..., C_\omega$ les corresponden los cálculos de primer orden sin identidad $C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*, ..., C_\omega^*$ Por razones de simplicidad se describe primero el cálculo C_1^*.

Para obtener C_1^* es necesario añadir los siguientes postulados a la lista de axiomas de C_1.

I) $C \rightarrow A(x)$

$C \rightarrow \forall x A(x)$

II) $\forall x A(x) \rightarrow A(t)$

III) $A(t) \rightarrow \exists x A(x)$

IV) $A(x) \rightarrow C$

$\exists x A(x) \rightarrow C$

V) $\forall x (A(x))^o \rightarrow (\forall x A(x))^o$

VI) $\forall x (A(x))^o \rightarrow (\exists x A(x))^o$

VII) Si A y B son fórmulas congruentes, o una es obtenida de la otra por supresión de los cuantificadores vacuos, entonces el esquema $A \leftrightarrow B$ es un axioma.[105]

Teorema 13. Si $A_1, A_2, ..., A_m$ son las primeras fórmulas componentes del conjunto Γ, y A es una fórmula cualquiera, luego $\Gamma \vdash A$ en si, y solamente si, $\Gamma, A_1^o, A_2^o, ..., \vdash A$ en C_1. Como en el caso del Teorema 4, la idea intuitiva es, *mutatis mutandis*, que una fórmula cualquiera A es deducible en el cálculo clásico de los predicados si, y solamente si, es deducible en añadiéndole adecuadamente el principio de no contradicción.

Teorema 14. El cálculo C_1 es indecidible.

La idea de esta demostración radica en el hecho de que más A^o es igual al cálculo clásico de los predicados de primer orden. Asimismo está sujeto al Teorema de Church (1936) que establece que es recursivamente indecidible. Más específicamente, el conjunto de los teoremas de no es recursivamente decidible. Y la sustracción del esquema A^o del conjunto de los teoremas de y de los esquemas inmediatos a '$A \wedge \neg A \rightarrow B$' no cambia esta situación.

Teorema 15. El cálculo C_1^* es consistente (simplemente consistente).

La idea intuitiva para la demostración del teorema 15 es en lo fundamental la misma que sugerimos para demostrar el teorema 6. La variante consiste en este caso en que es necesario

105 Da Costa refiere que ha tomado esta regla de *Introduction to Metamathematics* de Kleene, p. 153. Asimismo I-VII) se encuentran sujetos a las usuales restricciones para 'x'.

además considerar la consistencia simple de los postulados I)-VII) y de las consecuencias de ellos obtenidas por MP. Para ello es suficiente interpretar tales postulados en un dominio de un elemento y resulta casi obvio que se convierten en esquemas de C_1 válidos. Naturalmente estamos suponiendo el conocido resultado que establece que cualquier conjunto de fórmulas es consistente si, y solamente si, tiene un modelo (Chang y Keisler, 1973, consignan este resultado como proposición 1.3.21).

Teorema 16. Si A es una fórmula predicativa que contiene letras predicativas que carecen variables de tipo 'x', 'y', etc., luego $\vdash A$ en C_1^* si, y solamente si, $\vdash A$ en C_1.

Este teorema establece que solo los esquemas válidos de C_1 son también válidos en .

Teorema 17. En el cálculo no son válidos, los siguientes esquemas:

$\neg\exists x\neg A(x) \leftrightarrow \forall xA(x)$

$\neg\forall x\neg A(x) \leftrightarrow \exists xA(x)$

$\neg\exists xA(x) \leftrightarrow \forall x\neg A(x)$

$\exists x\neg A(x) \leftrightarrow \neg\forall xA(x)$

Este teorema puede demostrarse por contraejemplo construyendo una interpretación con un dominio de dos objetos. En este caso cada uno de los esquemas anteriores no resultará válido aplicando las reglas de valuación que se han dado para probar el Teorema 2. La idea es que existe al menos una interpretación que no satisface los esquemas 1-4 porque las clásicas tautologías de De Morgan no son esquemas válidos de C_1^*. Naturalmente, estamos presuponiendo que cualquier conjunto de fórmulas no es lógicamente válido si existe al menos una interpretación para ellas que no es su modelo. En este caso concreto, la valuación de cada una de las fórmulas 1-4 no siempre será igual a 1 bajo la interpretación propuesta.

El cálculo de los predicados C_n^* para $2 \leq n < \omega$

Los postulados del cálculo de los predicados con la limitación señalada en el subtítulo de esta sección, son los mismos que los de C_1^* con la excepción de que V) y VI) deben ser reemplazados por:

Vn) $\forall x(A(x))^{(n)} \rightarrow (\forall x(A(x)))^{(n)}$

VIn) $\forall x(A(x))^{(n)} \rightarrow (\exists x(A(x)))^{(n)}$

Teorema 18. Si $A_1, A_2, \ldots, A_m$ son las primeras componentes del conjunto de fórmulas Γ, y A es una fórmula cualquiera, luego $\Gamma \vdash A$ en si, y solamente si $A_1^{(n)}, A_a^{(n)}, \ldots, A_m^{(n)} \vdash A$ en C_n^*.

El sentido de este teorema es el mismo que el de los teoremas 4. y 13. Es una extensión de ellos.

Teorema 19. Los cálculos son indecidibles, en otras palabras, están sujetos al teorema de Church (1936).

Teorema 20. Si A es una fórmula cualquiera de luego $\vdash A$ en si, y solamente si $\vdash A$ en C_n para $0 \leq n < \omega$.

Teorema 21. Los cálculos son simplemente consistentes.

La idea intuitiva para demostrar este teorema es la misma que la sugerida en el teorema 15.

Teorema 22. Los cálculos C_n^* son finitamente trivializables pero los C_ω^* no. Este teorema vale en general para $0 \leq n < \omega$.

La idea intuitiva es la misma que la sugerida en el caso del teorema 7. En efecto para cualquier fórmula A de C_n^* el esquema '$A \wedge \neg^{(n)} A$' trivializa el cálculo correspondiente.

Teorema 23. En los cálculos C_n^* para $1 \leq n < \omega$ la negación $\neg^{(n)}$ tiene las mismas propiedades de la negación clásica.

El cálculo de predicados de primer orden con igualdad $C_n^=$

A los cálculos de predicados sin igualdad C_1^*, C_2^*, ..., C_n^*,... C_ω^* les corresponde $C_1^=$, $C_2^=$, ..., $C_n^=$, ...$C_\omega^=$ ... que son extensiones con igualdad de los primeros. Por razones de comodidad se describe primero, como en los casos precedentes, el cálculo $C_1^=$

Los axiomas del cálculo $C_1^=$ son los mismos que los de C_1^* con el sólo añadido de:

I') $x = x$

II') $x = y \rightarrow (A(x) \rightarrow A(y))$, con las usuales restricciones para el uso de las variables 'x', 'y' que se resumen en que 'y' no debe caer dentro del alcance de algún cuantificador que aparezca en 'A(x)'.

Teorema 24. En $C_1^=$ los siguientes esquemas son deducibles con las restricciones usuales de $C_0^=$ para el uso de las variables 'x', 'y', etc.

$\vdash x = y \rightarrow y = x$

$\vdash (x = y \wedge y = z) \rightarrow x = z$

$\vdash x = y \rightarrow (A(x) \leftrightarrow A(y))$

$(A(t))^o \vdash (A(x) \wedge \neg A(x)) \rightarrow x \neq y$

$\vdash \forall y (F(y) \leftrightarrow \exists x (x = y \wedge F(x)))$

$\vdash \exists x (F(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow (x = y)) \leftrightarrow \exists x \forall y (x = y) \leftrightarrow F(y))$

$\vdash \exists x (F(x) \wedge \forall x \forall y (F(x) \wedge F(y) \rightarrow x = y) \leftrightarrow \exists x (F(x) \wedge \forall y (F(y) \rightarrow x = y))$

$(F(x))^{o}, (x = y)^{o} \vdash \exists y \forall x (x = y \leftrightarrow F(x)) \leftrightarrow \exists x F(x) \wedge \neg \exists x (F(x) \wedge \exists y (x \neq \wedge F(y)))$

Teorema 25. Si $A_1, A_2, ..., A_m$ son las primeras componentes del conjunto de fórmulas Γ, y A es $C_0^=$una fórmula cualquiera, luego $\Gamma \vdash A$ en si, y solamente si $\Gamma, A_1^o, A_2^o..., A^o_m \vdash A$ en $C_1^=$

Teorema 26. El cálculo $C_1^=$ es indecidible.

Teorema 27. Si el símbolo de igualdad '=' no está contenido en la fórmula A, luego $\vdash$ en $C_1^=$. Si, y solamente si $\vdash A$ en $C_1^=$.

Teorema 28. Los resultados del teorema 24 son generalizables a C_n para $1 < n < \omega$ reemplazando el símbolo '^{o}' por el símbolo '$^{(n)}$'. Asimismo los esquemas y fórmulas que no contienen el símbolo '^{o}' se cumple en $C_n^=$.

Teorema 29. El teorema 25 es generalizable a C_n para $1 < n < \omega$.

Teorema 30. Los cálculos $C_1^=$ para $0 \leq n \leq \omega$ son consistentes e indecidibles.

Teorema 31. Los cálculos $C_n^=$ para $0 \leq n < \omega$ son finitamente trivializables. El cálculo $C_\omega^=$no es finitamente trivializable.

Teorema 32. En $C_n^=$para $1 \leq n < \omega$ la negación $\neg^{(n)}$ tiene las mismas propiedades de la negación clásica.

El cálculo $C_\omega^=$

El cálculo $C_\omega^=$ queda definido por los axiomas 1. - 11., I)-IV) y por I') y II'). Los resultados presentados en esta exposición se cumplen para C_ω, C_ω^*, $C_\omega^=$ solamente en los casos que puedan ser traducidos a una formalicen que omita los símbolos '^{o}' y $^{(n)}$.

Bibliografía

Arruda, A.I. y da Costa N.C.A. (1977) *Une Sémantique pour le calcul* C_1 C.R.Acad.Sc., Paris, t. 284. Serie a-279 (Presentée par Garnier)

Arruda, A. I. (1980) *A Survey of Paraconsistent Logic, Mathematical Logic in Latin America.* North Holland, pp. 1-41.

Asenjo, F.G. y Tamburino, J. (1974) "Logic of Antinomies". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 16, pp. 17-44.

Chang, C.C. y Keisler, H. J. (1973) *Model Theory.* North Holland Publishing Company.

Church, A. (1963) "A note on the Entscheidungsproblem" *Journal of Symbolic Logic*, v., 1.

Kleene, S.C. (1952) *Introduction to Metamathematics.* North Holland Publishing Company. (Existe versión castellana de Editorial Tecnos).

Da Costa, N. C. A. (1974) *On the Theory of Inconsistent Formal Systems.* Notre Dame Journal of Formal Logic, 15, pp. 497-510.

Da Costa, N.C.A. y Alves, E. (1976) *Une Sémantique pour le calcul* C_1. C.R. Acad. Sc. Paris, t.283, Serie A-729.

Huntington, E.V. (1904) *Sets of Independent Postulates for the Algebra of logic.* Trans. Amer. Math. Sec. 5, pp. 288-309.

Kolmogorov, Andrei, N. (1925) *On the Principle of excluded middle*, editado por van Heijenoort en: «From Frege to Gödel». Harvard University Press. 1967, pp. 418-437.

Lewis, C. I. (1918) a *Survey of Symbolic Logic*, University of California Press, Berkeley.

Miró Quesada, Francisco (1978) «Las lógicas heterodoxas y el problema de la unidad de la lógica» En: *Lógica, aspectos formales y filosóficos.* Lima, Fondo Editorial de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Priest, G. y Routley, R. (1984) "On Paraconsistency" En: *Research Series in Logic and Methaphysics,* Departament of Philosophy, Australian National University.

Routley, R. y Meyer, R. K. (1976) *Dialectic Logic, Classical Logic and the consistency of the world*, Studies in soviet Thought, 16 d. Reidel Publishing Company.

Schröder, E. (1905) *Vorlesungen über die Agebra der logik*. Herausgegeben von E., Muller, Leipzig.

Smirnov, V.A. (1987) *8º International Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Sciencie*, Abstracts, v.5, part., 3 Secc. 1-13. Moscow.

Suppes, Patrick (1966) «The Probabilistic Argument for a Non-Classical Logic of Quantum Mechanics». En *Philosophy of Sciencie*, t. 33. pp.319-337.

Variedades aritméticas versus modelo *standard*

En esta exposición que reinterpreta resultados tempranos pero cenitales en la investigación en lógica matemática, en función de los intereses epistemológicos actuales, usaremos frecuentemente las expresiones *axiomas de Peano* y *sistema de Peano*. Para los fines de este trabajo ellas pueden ser consideradas como sinónimas y se refieren a las versiones contemporáneas y perfeccionadas de los axiomas que originalmente dio para la aritmética el matemático italiano Giuseppe Peano en su famoso trabajo *Arithmetices Principia*. Las versiones de los axiomas de Peano que estamos aludiendo son bastante conocidas y están constituidas por las simplificaciones de von Neumann y León Henkin, y otras que son esencialmente equivalentes. Ellas se caracterizan por estar constituidas por tres proposiciones, dos de las cuales están destinadas a precisar el estatuto del número cero o del número 1, según el elemento distinguido que se elija, y el de la función sucesor. La tercera expresa el Principio de Inducción Matemática. Asimismo, en una primera parte, por razones pedagógicas, utilizaremos una versión de los axiomas de la aritmética formalizada debida a Hao Wang.

También se usará el concepto de modelo en el sentido intuitivo de una interpretación que asigna significados (una semántica) a los términos extralógicos de un conjunto de axiomas convirtiéndolos en proposiciones verdaderas. De esta manera la expresión *Modelo de Peano* no se refiere a un conjunto de axiomas de Peano sino a una interpretación que convierte en verdaderos tales axiomas.

Para nuestros fines, asimismo, es necesario distinguir entre aritmética formalizada y axiomas de Peano, pues la primera incluye a los segundos y comprende, además, las definiciones recursivas para la suma y para el producto. Como veremos luego, las propiedades de tales conjuntos de proposiciones no son exactamente las mismas.

De otra parte, el título de este trabajo podría suscitar sorpresa en algunos especialistas en la medida de que es sabido que los axiomas de Peano formalizados con los medios expresivos de la lógica de segundo orden son categóricos, es decir carecen de modelos *no-standard*. Sin embargo, las dificultades desaparecen en tanto que hemos restringido nuestro análisis a los axiomas de Peano formalizados mediante un lenguaje de primer orden que es el nivel en el que parece que se presentan los problemas más interesantes porque no se precisa de hipótesis adicionales, no constructivas, que exceden los métodos de prueba admitidos por los grandes resultados en lógica matemática como son los de Church y Gödel entre otros.

Categoricidad e inducción matemática

El Principio de Inducción Matemática cumple una función decisiva en la demostración de la categoricidad de los axiomas de Peano. Si se asume que el principio garantiza la ausencia de «intrusos» en la sucesión de números naturales, entonces puede demostrarse la categoricidad de los axiomas de Peano, esto es, que dados dos modelos arbitrarios para dichos axiomas, entonces estos dos modelos siempre son isomorfos. En la medida que el modelo clásico o *standard* de los axiomas de Peano es el conjunto de los números naturales, la pretensión de categoricidad de la aritmética puede ser expresada, en este caso, en términos de que cualquier interpretación que satisfaga los axiomas de Peano debe ser isomorfa con el conjunto de los números naturales. En otra palabras, si los mencionados axiomas fueran categóricos, todas las interpretaciones que se den de ellas serían fundamentalmente equivalentes, pues la relación de isomorfismo entre un modelo **M** y otro **N** exige una correspondencia de «uno a uno» (biyectiva) entre los elementos de **M** y **N** y que todo axioma verdadero en **M** sea verdadero en **N**. De otra parte, si se postula que el Principio de Inducción Matemática no impide la presencia de los «intrusos», esto es, si el conjunto de números que hay entre **n** y **n' (n'=n+1)** no es vacío, entonces puede construirse interpretaciones de los axiomas de Peano que los satisfagan pero que sin embargo no sean isomorfas con el conjunto de números naturales. A dichos modelos se los conoce como *no-standard* o *no–clásicos* y su descubrimiento fue divulgado por el trabajo de Skolem titulado *Mathematical Interpretation of Formal Systems* publicado en 1934. Un modelo *no standard* por definición tiene una estructura distinta a la de los números naturales y la prueba de su existencia permite afirmar la no categoricidad de los axiomas de Peano y de la aritmética expresados en un lenguaje de primer orden. Esto significa, en otras palabras, que una misma teoría es verdadera respecto de estructuras distintas.

Sin embargo, la no categoricidad, como es sabido, no es privativa de los axiomas de Peano ni de la aritmética formalizada en el nivel de los lenguajes de primer orden. En efecto hay estructuras pequeñas que no son categóricas y un ejemplo de ellas es el cálculo proposicional clásico que admite interpretaciones bivalentes y trivalentes, lo que demostraron Lukasiewicz y Post. Estos resultados han sido generalizados a modelos n-valentes.

La variante está dada por el hecho de que el cálculo proposicional es decidible y además sintáctica y semánticamente completo, en cambio la aritmética formalizada, de acuerdo con el teorema de Gödel, no es completa y además tampoco es decidible. Si restringimos la comparación a lo que estrictamente hemos llamado *axiomas de Peano,* entonces ocurre que ellos sí son completos y decidibles.

Por tanto, existen sistemas incompletos que no son categóricos y sistemas completos que tampoco tienen esta propiedad. Consecuentemente, la no categoricidad de un sistema no implica ni su compleción ni su incompleción. Pero en cambio, la categoricidad de un sistema sí implica su compleción, lo que constituye un resultado al cual acudiremos posteriormente.

Teorema de Gödel y la no categoricidad de la aritmética formalizada

La existencia de modelos *no-standard* está lógicamente ligada a los resultados del primer teorema de Gödel, llamado de incompleción de la aritmética formalizada. De él en conjunción

con el teorema relativamente simple que afirma que todo sistema categórico es completo, se deduce, por Modus Tollens, que la aritmética formalizada no es categórica y que debe ser posible construir para ella modelos *no-standard* aunque estos no hubieran sido encontrados todavía. Como nos parece pertinente proporcionar algunos detalles para comprender mejor estas relaciones y como uno de nuestros objetivos es construir un modelo *no-standard* por el interés epistemológico que este en sí mimo tiene, en lo que sigue expondremos un sistema de axiomas para la aritmética formalizada de primer orden siguiendo básicamente a Hao Wang en su trabajo *The Axiomatic Method.*[106]

El sistema **Z*** de la aritmética formalizada, que también puede ser denominado para los enteros positivos, presupone la validez de la reglas de inferencia de la lógica elemental de primer orden y de sus nociones de función de verdad, identidad, cuantificación, teorema, etc. Dentro de este contexto añade como axiomas extralógicos específicos los siguientes:

Z1. No existe ni siquiera un **m** tal que **m' = o**

Z2. Para todo **m** y para todo **n**, si **m' = n'**, luego **m = n**. Asimismo **n' = n + 1**

Z3. Para cada predicado **H (x)**, si **H(o)** y si para todo **m, H(m)** implica **H(m')**; luego todo **n, H (n).**

Z4. Para cualquier **m, m + o = n.**

Z5. Para todo **m** y para todo **n, m + n' = (m + n)'.**

Z6. Para cualquier **m, m. o = o.**

Z7. Para todo **m** y para todo **n, m. n' = (m.n) + m.**

Las proposiciones, **z1, z2 y z3** constituyen lo que nosotros propiamente hemos llamado axiomas de Peano o sistema de Peano. Las proposiciones **z4, z5, z6 y z7** constituyen las definiciones recursivas para la adición y para el producto. Las siete juntas son un sistema de axiomas para la aritmética formalizada a partir del cual se pueden probar teoremas muy importantes como el conocido como Primer Teorema Gödel que en este caso tendría la siguiente formulación:

«Sea **S** un sistema igual a **Z*** o que contiene a **Z*** como parte. Si **S** es consistente, luego existe un enunciado perteneciente a **S** de la forma Para todo **m, H(m),** el cual no es ni probable ni refutable en **S** aunque **H(o), H(o'), H(o"),** ..... sean todos y cada uno de ellos probables en **S**. Por tanto si **S** es consistente, entonces **S** es incompleto y además no es completable».[107]

Como claramente puede entenderse, en esta formulación del teorema de Gödel se está poniendo énfasis en el nivel sintáctico de la incompleción de la aritmética formalizada, pues no recurre a la interpretación semántica utilizando el lenguaje natural, de mayores

106 Contenido en su obra *Logic, Computers and Sets*, Chelsea Publishing Company, N.Y., 1970.

107 Anotamos que en la versión inicial de Gödel se exigía que S tenga consistencia omega. Rosser (1936) demostró que tal requisito no era indispensable.

resonancias filosóficas, que se expresa puntualizando que existe a menos una proposición verdadera de la aritmética que no es deducible ni refutable en **Z***. A tal proposición podemos denominar **G** y llamarla indecidible o independiente respecto de **Z***.

De otra parte, Wang establece en el trabajo antes citado como teorema 1 «Cada sistema categórico es completo», lo que hay que entender también en el sentido de compleción sintáctica. Consecuentemente, desde el teorema 1 en conjunción con el resultado de Gödel se deduce que, si **Z*** no es completo, entonces **Z*** no es categórico, por aplicación del *Modus Tollens* al teorema 1, como señalamos antes.

Asimismo, debemos indicar que la lógica de primer orden no es sintácticamente completa. De serlo, de conformidad con el teorema expuesto como N° 8 por Wang que dice «Cualquier sistema completo es decidible», sería una teoría para la cual existiría un procedimiento efectivo para decidir la validez de cualquier proposición, lo que contravendría los resultados del conocido teorema de Alonso Church. Este resultado está corroborado por el hecho de que si bien de acuerdo al primer teorema de Gödel la lógica de primer orden es semánticamente completa en el sentido de que toda la proposición es demostrable si y solamente es válida (lógicamente verdadera), en cambio no existe un procedimiento efectivo para rechazar una proposición si no es válida. Sin embargo, es importante reiterar que la parte de los axiomas de **Z** constituida por los enunciados **z1, z2 y z3**, que es la que propiamente define un modelo de Peano, configura un sistema completo y decidible.[108]

La posibilidad de probar la compleción y decidibilidad de tal sistema radica en la posibilidad de eliminar los cuantificadores universales. Evidentemente, estas constataciones no cuestionan la validez del teorema de Gödel que ha sido demostrado para los axiomas de Peano más las definiciones recursivas de adición y multiplicación, en otros términos, para la aritmética formalizada a través de **Z***.

Pero como la compleción sintáctica y la decidibilidad son implicadas por la categoricidad pero no se cumple necesariamente la afirmación recíproca, puede demostrarse que los axiomas **z1, z2 y z3**, no son categóricos como lo haremos luego, mediante la construcción de un modelo «no-standard» que debe ser entendido estrictamente, como lo hemos señalado antes, solo como una prueba constructiva de la no categoricidad de los axiomas de Peano formulados con los medios expresivos de una teoría de primer orden. En relación a todo el conjunto de axiomas de **Z*** Thoralf Skolem fue el primero en construir un modelo no standard en su artículo titulado *The Foundations of Elementary Arithmetic Established by Means of the Recursive Mode of Thought, Without Apparent Variables Ranging over infinite domains* publicado originalmente en 1923. Trabajos posteriores al de Skolem, presentando modelos no standard para segmentos de **Z*** han sido publicados, entre otros, por Hasenjaeger. Aunque el que construiremos luego, está inscrito dentro de esta perspectiva, no se debe a este tratadista. Erenfeucht demostró en 1958 la existencia de al menos 2 a la potencia aleph subíndice uno modelos no-standard, cada uno de cardinalidad aleph subíndice cero.

108 Según Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, D. van Nonstrand Company, p 116, el primero en demostrar la compleción y la decidibilidad del z1, z2 y z3., más la definición de adición fue Presburger en 1929.

Construcción de un modelo «no-standard» para los axiomas de Peano

Ante de proceder a la construcción del modelo ya varias veces aludido, debemos señalar que por razones de simplicidad hemos decidido hacerlo con referencia a la versión de los axiomas de Peano dada por von Neumann a la que hemos introducido una alteración muy ligera. Este procedimiento es completamente válido porque las proposiciones **z1** y **z2** son fácilmente deducibles con variaciones de detalle del sistema que utilizaremos y que es el siguiente:

B1. $1 \in N$

B2. Si $n \in N$, entonces $n' \in N$; $(n' = n + 1)$

B3. Si $S \subseteq N$, $1 \in S$ y $n \in S$ implica $n' \in S$, luego $S = N$

Por lo dicho anteriormente, el modelo «no-standard» que satisface **B1, B2 y B3** también satisface **z1, z2, z3**. Asimismo, indicamos que esta demostración está propuesta en el artículo de Wang *The Axiomatization of arithmetic.* [109] Nuestro desarrollo es como sigue:

Consideramos un universo **V** de propiedades las cuales son predicables de números. Una propiedad **P(x)** estará en **V** si y solo si satisface una de las dos siguientes condiciones:

a) **P(x)** es verdadera solamente para un conjunto finito de números de un conjunto dado.

b) **P(x)** es verdadera para todos los elementos del conjunto dado excepto para un conjunto finito de ellos.

En este desarrollo asumimos la usual postulación matemática que establece que el conjuntó vacío es finito.

Asimismo, por ejemplo, si **P(x)** es la propiedad «**x** es un entero positivo impar», entonces **P(x)** no pertenece a **V**, si se asume como referente de **P(x)** el conjunto **N** de los números naturales. No satisface la condición **a**) porque **P(x)** es verdadera para infinitos elementos de la forma **2n + 1**. No satisface la condición **b**) porque **P(x)** es falsa para infinitos números naturales de la forma **2n**.

Consideramos el conjunto **X = N U T** (la letra «**U**» denota la operación de unión de conjuntos en este contexto). El conjunto **N**, es el de los números naturales, siguiendo las convenciones antes utilizadas.

El conjunto T se define:

$$T = \{\forall x \,/\, x = \frac{2b+1}{2}, b \in Z\}$$

109 Contenido, también en *Logic, Computers and Sets*, Chelsea Publishing Company, New York, 1970.

Cualquier elemento del conjunto **X** será denotado por la letra '**z**', el sucesor de '**z**' es denotado por '**z + 1**'. Así hemos construido el modelo **W** con dominio **X** cuyos componentes explícitos son **[X, V, z + 1, 1]**. Como se comprende, estamos asumiendo por hipótesis que los elementos del dominio de **W** satisfacen las propiedades **P(x)** del universo **V**. El sentido de la primera parte de nuestra demostración consiste, por tanto, en probar el condicional «si los elementos del dominio de **W** (esto es, los miembros de **X**) satisfacen propiedades **P(x)** de **V**, entonces **W** satisface los axiomas **B1, B2 y B3**, en otras palabras, **W** es un modelo de Peano. La segunda parte consiste en probar que **W** no es isomorfo con el conjunto de los números naturales y, por consiguiente, es *no-standard*.

Demostración que W satisface los axiomas de Peano

Es obvio que **W** satisface **B1** porque 1 es elemento distinguido del modelo y claramente es verdad que **1 ε X**.

W satisface el axioma **B2**. : Cuando **z ε N**. es evidente que **z + 1 ε N**, pues **N** es el modelo clásico de Peano. Si **z** es miembro del otro elemento de la unión, este es si **z ε T**, entonces **z** es la forma $\frac{2b+1}{2}$ y el sucesor $z+1=\frac{2b+1}{2}+1$ y este último es igual a la fracción $\frac{2b'+1}{2}$ que obviamente pertenece a **T**, con la acotación **b'= b+1**. Por tanto, en ambos caso se cumple que **z + 1 ε X.**

Ahora probaremos que **W** satisface **B3** para cualquier propiedad **P(x)** de **V**. En otras palabras, probaremos que las propiedades de **V** son inductivas en **N** y en **X**. Asumiremos como hipótesis que **P(x)** es una propiedad de **V** que satisface el antecedente del Principio de Inducción Matemática que es **B3**. Esto es, suponemos que se cumplen **P(1)** y **P(m) → P(m + 1).** Desde esta hipótesis se sigue inmediatamente la verdad del consecuente siempre que **z ε N**, pues como **N** es el modelo *standard* de Peano, entonces vale **(∀x) P(x)** para el conjunto **N** excepto para el conjunto vacío al que por definición hemos asumido como finito. Cuando **z ε T** la verdad del consecuente no se sigue inmediatamente y es necesario proceder por reducción al absurdo para probar la verdad de **(∀x) P(x).**

Supongamos que existe un **z ε T** tal que z sea $\frac{2b+1}{2}, b \in Z$ y que sea falsa la afirmación **P(z).**

Nosotros en lugar de $\frac{2b'+1}{2}$, donde b sigue siendo miembro de **Z**, podemos usar la abreviación **w/2** y así nuestra hipótesis es que **P(w/2)** no se cumple. En otras palabras estamos suponiendo que existe al menos un elemento de T para el cual alguna **P(x)** de **V** no es inductiva. Pero si **P (w/2)** es falsa, entonces **¬P (w/2)** es verdadera. Asimismo, por hipótesis y por tautología de transposición se cumple la condición **¬P(m) → ¬P(m – 1).** De lo anterior se deduce que es verdad **¬P(w/2 –1)** y así por el mismo procedimiento se cumple

$\neg P(w/2 - 2)$ y de la misma manera ocurre para todos los antecesores de $w/2$. Pero como en **X** los antecesores de $w/2$ son infinitos, entonces $P(x)$ sería falsa de infinitos elementos lo que contradice la condición **b**) de la definición de los miembros de **V**. Y desde que hemos demostrado que $P(x)$ es inductiva en **N**, entonces $P(x)$ tampoco satisface la condición **a**) de pertenecer a **V** porque se cumple en el conjunto infinito **N**. En consecuencia, hemos llegado a una contradicción, pues partimos suponiendo que $P(x)$ pertenecía a **V** y que existía al menos un $z \varepsilon T$ que no la satisfacía y hemos llegado, desde tal suposición, a que $P(x)$ no pertenece a **V**. En consecuencia, tal $z \varepsilon T$ no puede existir y se cumple para todo $z \varepsilon T$ la afirmación $(\forall x)\ P(x)$. De este modo queda establecido que **W** satisfaga **B3** y se completa la prueba de que **W** es modelo de Peano.

Demostración de que N y W no son modelos isomorfos

La prueba es por reducción al absurdo. Si **N** y **W** fueran isomorfos entonces existiría una función $f : N \rightarrow X$ tal que sería biyectiva y cumpliría las condiciones:

c) $f(1) = 1$

d) $f(z + 1) = f(z) + 1$

Luego, si $-1/2 \varepsilon X$ entonces existe un único $z \varepsilon N$ y $f(z) = -1/2$. Por la condición **c**) se deduce $z \neq 1$, entonces como los elementos de **N** son 1, el elemento base, o sus sucesores, entonces **z** necesariamente debe ser sucesor de algún z_1 y por tanto $z = z_1 + 1$ y, consecuentemente, $1 \leq z_1 \leq z-1$. Por condición **d**) y el resultado anterior $f(z) = f(z_1) + 1$. Así obtenemos $-1/2 = f(z_1) + 1$ de donde se tiene inmediatamente $f(z_1) = -1/2 - 1 = -3/2$. Esto significa $z_1 \neq 1$. Consecuentemente z_1 es el sucesor de algún z_2 y $z_1 = z_2 + 1$ y se cumple $1 \leq z_2 \leq z_1 \leq z$. De modo análogo al anterior, $f(z_2) = f(z_1) - 1$ y así sucesivamente, podemos calcular el valor de la función para todo los antecesores de **z** hasta que en un número finito **p** de pasos calcularemos el valor de $f(z_p)$ para $z_p = 1$. Esto equivaldrá a haberle restado a $f(z)$ el valor 1 un número finito p de veces. Esto es $f(1) = -1/2 - 1 - 1.....$ donde 1 aparece p veces. Por tanto $f(1) = -1/2 - (1 + 1 + 1 + 1...)$ o, lo que es lo mismo, $f(1) = -1/2 - p$ para $p \geq 1$. Pero la diferencia $-1/2 - p\ (p \geq 1)$ es siempre menor que **0**. En consecuencia, $f(1)$ asume un valor menor que **0** lo que contradice la condición **c**). Así hemos probado que suponer que **N** y **X** son isomorfos conduce a contradicción, lo que conduce a que **W** y **N** no son isomorfos.

Algunas consecuencias epistemológicas derivadas de la construcción de modelos *no-standard*

La construcción de modelos *no-standard* para los axiomas **B1, B2 y B3**, y sistemas afines, prueba que la teoría que con ellos se construye es verdadera respecto de conjuntos de estructura distinta como es el caso del conjunto de los números naturales y el conjunto **X**, dominio de la interpretación **W**. Consecuentemente, la aritmética ordinaria es solo una particularización, por decirlo así, de una teoría que es verdadera de un número infinito no enumerable de otras posibles aritméticas. Esto último se deduce de los resultados de Erenfeucht que establecen la existencia de al menos $2^{\aleph_0}$ modelos *no-standard*. De esta manera, los enunciados de la aritmética formalizada, esto es, presentados como fórmulas cerradas de un lenguaje de primer orden, no constituyen afirmaciones sobre una estructura determinada y única sino sobre una gama muy amplia de estructuras posibles a las que podríamos

llamar, usando casi una metáfora, *variedades aritméticas* que, con algún sabor a paradoja, resultan ser elementos de un conjunto de mayor tamaño que el de los números naturales si tomamos como referencia su cardinalidad.

Apoyándonos en la demostración que hizo Presburger (1929), estableciendo que **z1, z2 y z3,** y sistemas equivalentes, sin las definiciones recursivas de la adición y del producto, son completos y decidibles, nos encontramos en condiciones de afirmar que aún en este caso no es posible interpretar que los axiomas de Peano agotan el concepto de número natural porque un sistema en el cual toda afirmación es probable o refutable mediante un procedimiento efectivo, es decidible pero no categórico La interpretación, frecuentemente expuesta, de que el teorema de Gödel prueba que los formalismos son insuficientes para expresar el concepto de número natural quedaría así como tesis plausible aún en el caso de que limitemos la definición de numero natural a lo que hemos llamado en este trabajo *axiomas de Peano,* estructura que no incluye las definiciones recursivas de la adición y el producto.. Asimismo si pensáramos que el pensamiento matemático se genera desde de los modelos a los axiomas, como frecuentemente sostienen los inductivistas empiristas para la física formalizada y las ciencias fácticas, los teoremas antes mencionados podrían ser invocados como un argumento lógico en favor de que las teorías axiomáticas de igual o mayor riqueza que la aritmética de Peano, formalizada con la lógica de Principia Matemática, están necesariamente subdeterminadas por sus modelos en la medida que diferentes modelos, muchos de los cuales podrían corresponder al mundo empírico o factual, convierten en verdaderos, pese a sus diferencias, a los mismos axiomas.

Como habrá sido advertido, la construcción de modelo *no-standard* de la sección anterior, por las condiciones en las que se define el conjunto **X**, presupone la existencia de elementos entre **n y n + 1** lo que no permite la obtención recursiva de los elementos de la forma $\frac{2b+1}{2}$, para *b* perteneciente al conjunto de los enteros. Estos elementos intermedios o, como los llama Hao Wang, «intrusos» no son, sin embargo, excluidos por el Principio de Inducción Matemática **(B3)** pues, como hemos demostrado, el conjunto **T** satisface este principio y es inductivo. De otra parte, como no todos los elementos de **X** son de obtención recursiva, **X** no es un conjunto bien ordenado por no tener primer elemento. Para construir **W** ha sido necesario debilitar el lenguaje definiendo un universo **V** de propiedades de primer orden que incluye tanto las que son satisfechas por los números naturales como otras que se cumplen,además, para el conjunto **X**. Por tanto, la construcción del modelo *no-standard* ha presupuesto que el Principio de Inducción Matemática se cumpla para las propiedades inductivas del conjunto de los números naturales extrapolables a los «intrusos».

Anexo

En lo que sigue proporcionamos definiciones y teoremas (en lenguaje no formalizado) usados por Hao Wang en la sección *Gödel's theorems* del libro *Logic, Computers, and Set*, los mismos que pueden ayudar a una mejor comprensión de este artículo (la versión castellana es del autor).

Definición 4. Se dice que un sistema es completo si cada proposición ***p*** en el sistema o es demostrable o es refutable; en otras palabras, para cada ***p***, o ***p*** o ¬ ***p*** es un teorema.

Teorema 1. Todo sistema categórico es completo.

Definición 5. Un procedimiento decisorio para la demostratividad (verdad, validez) de un sistema axiomático es un método efectivo por el cual dada cualquier proposición del sistema, podemos decidir en un número finito de pasos si es demostrable (verdadera, válida).

Teorema 2. Existen sistemas de axiomas incompletos **S** para los cuales hay un procedimiento de decisión para la demostratividad. Ej. un sistema constituido por un axioma de limitación.

Observación. Un procedimiento de decisión para la demostratividad, en un sistema **S** incompleto, permite dada una preposición ***p***, decidir si ***p*** es demostrable o no. Si ***p*** no es demostrable, en el caso de los sistemas completos, entonces no-***p*** es teorema. Pero si ***p*** no es demostrable y el sistema es incompleto, entonces no-***p*** queda indeterminada.

Teorema 3. Sea **S** cualquier sistema que es igual a **Z*** (sistema de los enteros no negativos) o que contiene a **Z**$^{+}$. Si **S** es consistente luego hay un enunciado de **S** de la forma «Para todo m, Hm» el cual no es probable ni refutable en **S** aunque **Ho, Ho', Ho».....**son demostrables en **S**. Luego si **S** es consistente, S es incompleto e incompletable.

Teorema 4. Existen sistemas de axiomas los cuales son completos pero no categóricos.

Definición 6. Un sistema el cual contiene los enteros (no–negativos) se dice que es categórico relativo a sus enteros si y solo si todos los modelos del sistema, en los cuales los enteros reciben la misma interpretación (isomórfica) son isomorfos. Se dice que un sistema posee categoricidad relativa a los enteros regulares si y solo si todos los modelos de él, en los cuales los enteros son regulares (reciben la misma interpretación), son isomorfos.

Teorema 5. En **Z***, o en cualquier sistema que contiene a **Z***, no es posible definir la noción de verdad dentro de dicho sistema mismo.

Teorema 6. No hay un procedimiento de decisión para determinar cuáles sentencias de **Z*** son demostrables si el sistema es consistente.

Teorema 7. (Teorema de Church, A.) No hay un procedimiento de decisión para determinar cuáles sentencias de la lógica elemental (con o sin identidad) son demostrables. **O**,

en otras palabras, no hay un procedimiento de decisión para la teoría de la cuantificación o para el cálculo restringido de los predicados.

Teorema 8. Todo sistema completo es decidible.

Definición 7. Un sistema es consistente o libre de contradicción si ninguna sentencia **p** del sistema es tal que **p** y **no-p** son, ambas, teoremas.

Teorema 9. (Segundo teorema de Gödel). Si **S** es un sistema igual a **Z*** o que contiene a **Z***, si **S** es consistente, luego la consistencia de **S** no puede ser probada en **S** mismo.

Teorema 10. Un sistema formulado dentro del marco de **Q** (Cálculo restringido de predicados) es consistente si y solo si es satisfacible.

Definición 8. Una expresión esquemática de **Q** es válida si es verdadera en todos los modelos o interpretaciones sobre un dominio no vacío. Así **p** es válida **si y solo si no-p** no es satisfacible.

Definición 9. Se dice que un sistema es abierto completo si todas sus expresiones esquemáticas válidas son teoremas del sistema.

El procedimiento de axiomatización

El presente trabajo no pretende aportar nuevos conocimientos matemáticos sobre la probabilidad. Nos proponemos fundamentalmente mostrar una reconstrucción lógica de conocimientos ya existentes aprovechando propiedades del denominado cálculo proposicional clásico, lo que nos da oportunidad de poner en evidencia, aunque sea a un nivel muy introductoria, el rol que juega la lógica en la sistematización del conocimiento matemático. Asimismo, no debe esperarse encontrar en este estudio referencias o extensiones a lógicas polivalentes o a lógicas modales, pues tanto la lógica como la teoría elemental de la probabilidad usadas son las convencionales.

En el estudio de la probabilidad, desde el punto de vista lógico, debe considerarse dos aspectos: el sintáctico y el semántico. El primero se refiere a sus propiedades formales y es el que nos preocupa en este trabajo. El segundo, vinculado con las interpretaciones que se dan al concepto de probabilidad, es estudiado por los interesados en construir modelos para los sistemas axiomáticos de probabilidad. Aunque no abordaremos aquí el segundo aspecto, anotamos que los modelos más conocidos para los sistemas axiomáticos son el frecuencial, estudiado por von Mises y H. Reichenbach y el de rango desarrollado principalmente por R. Carnap. El modelo que goza de la preferencia de los matemáticos es el frecuencial, mientras que el rango es el que han preferido los lógicos de la ciencia como Popper.

A continuación reconstruiremos, con algunas modificaciones de detalle, el sistema lógico de probabilidad propuesto por H. Reichenbach en su clásico libro *The Theory of Probability*, capítulo 3. Esta tarea se inscribe en la perspectiva sintáctica que tiene en la axiomatización el medio lógico más eficaz de mostrar propiedades formales o estructurales. El desarrollo del sistema de Reichenbach será efectuado con independencia de toda interpretación para «probabilidad». Asumiremos solamente que existen ciertos valores numéricos denominados probabilidades básicas, sujetos a las condiciones establecidas por los axiomas, desde los cuales puede derivarse lógicamente otros. Evidentemente, la existencia de las probabilidades básicas no puede demostrarse dentro del sistema **R** (así llamaremos en adelante al sistema de Reichenbach), pues se postula que la afirmación «Existe la probabilidad básica p» es sintética y es verdadera, pero no es un teorema de **R**.

Para describir **R** es necesario indicar que este sistema puede ser expresado en un lenguaje **I** llamado «lenguaje implicativo» o en un lenguaje **P** al que simplemente denominaremos *notación **P***.

Los lenguajes I y P, con ciertas limitaciones que no son de fundamental importancia, pueden ser considerados cuasi equivalentes para nuestros fines. Sin embargo, uno puede resultar más intuitivo que el otro para poner de relieve ciertas propiedades.

Los lenguajes I y P, contienen los operadores «A», «V», «-», «⊃», «≡» de la lógica proposicional, además de «(«,»)», «[«,»]» y de los cuantificadores «∀», «∃», los usuales operadores aritméticos y el predicado de igualdad «=». La diferencia entre ambos lenguajes es que la *implicación de probabilidad* es expresada en I por fórmula (A B) mientras que en P por la fórmula P (A, B) = p. En este segundo caso la inclusión directa del signo '=' introduce la posibilidad inmediata de trabajar con igualdades lo que aporta una mayor facilidad operativa.

En ausencia de signos de agrupación, la jerarquía de los operadores comunes a I y P, en orden decreciente,

Damos la jerarquía solamente para los operadores lógicos cuyo uso es significativo en este trabajo. Los cuantificadores tienen una jerarquía sujeta a las convenciones usuales. Lo mismo ocurre con los operadores aritméticos.

De otra parte, es legítimo que los operadores proposicionales en este caso operen con clases debido a que el cálculo de clases y el cálculo proposicional son isomorfos.

Asimismo, tanto **I** con **P** están provistos de tautologías conocidas de la lógica proposicional que se comportan como reglas de derivación o transformación para la obtención de teoremas en **R**. Estas tautologías son añadidas a las reglas estrictamente matemáticas, que en este caso expresan propiedades de la aritmética elemental, las que también son usadas en las demostraciones.

Debido a lo anterior, la presentación de **R** si bien es axiomática debe sin embargo ser considerada todavía cuasi informal en la medida que hay un conjunto de propiedades lógicas y matemáticas que no haremos explícitas previamente sino que recurriremos a ellas en el momento oportuno.

La presentación de **R** se justifica porque, a diferencia de las versiones usuales de la teoría elemental de la probabilidad, muestra las conexiones lógicas existentes entre las proposiciones probabilitarias expresadas en **I** ó **P**, a través de ciertas tautologías de la lógica proposicional. Por añadidura, desde **R** se puede interpretar en términos de probabilidad fórmulas de la lógica proposicional de estructura típica como y otras, estableciéndose un método de cálculo para ellas.

Por razones de comodidad, en primer lugar señalaremos algunas características del sistema **R** expresado en lenguaje **I**. Luego proporcionaremos un desarrollo demostrativo en lenguaje **P**, debido a que este resultará para este efecto especialmente simple.

3.1 En **R** un valor de probabilidad corresponde a una *implicación de probabilidad* y esto se denota por (A $\overrightarrow{p}$ B) que se lee «**B**» se sigue de **A** con el grado de probabilidad **p**».

3.2 En $(A \overrightarrow{p} B)$ los componentes A y B son clases. Además A es denominada clase de referencia y B clase atributo. Cada clase es una secuencia de acontecimiento que son expresables por enunciados singulares de la forma p_k. Cada p_k, para k= 1,2....., n, describe un acontecimiento. La formulación detallada de $(A \overrightarrow{p} B)$ es la fórmula $(\forall_i)(x_i \in A \overrightarrow{p} x_i \in B)$ donde cada x_i es un acontecimiento. Consecuentemente A es $(\forall i)(x_i \in A)$ y una condición de existencia $(\exists i)(x_i \in A)$ será escrita en **R** como $\neg(\forall_i)\neg(x_i \in A)$.

3.3 El desarrollo de **R** requiere de una *regla de existencia* que asegura que «Si las implicaciones de probabilidad básicas son dadas, entonces el valor numérico p de $(A \overrightarrow{p} B)$ de R puede ser determinado mediante las reglas de **R** y, consecuentemente $(\exists p)(A \overrightarrow{p} B)$». Claramente, *la regla de existencia* no forma parte de **R** sino de su metalenguaje.

Los axiomas de R expresados en el lenguaje I son los siguientes:

$$Ax_i.\ (p \neq q) \supset [(A \overrightarrow{p} B) . (A \overrightarrow{q} B) \equiv (\bar{A})]$$

$$Ax_2.\ (A \supset B) \supset (\exists p)(A \overrightarrow{p} B).\ (p = 1)$$

$$Ax_3.\ \neg(\forall x_i)\neg(x_i \in A) \wedge (A \overrightarrow{p} B) \supset p \geq O$$

$$Ax_4.\ (A \overrightarrow{p} B).\ (A \overrightarrow{q} C).\ (A.B \supset \bar{C}) \supset (\exists r)(A \overrightarrow{r} B \vee C).\ (r = p + q)$$

$$Ax_5.\ (A \overrightarrow{p} B) \wedge (A \wedge B \overrightarrow{q} C) \supset (\exists w)(A \overrightarrow{w} B.C)\ (w = p.q)$$

En estos axiomas, en ausencia de signos de agrupación, el operador "$\overrightarrow{p}$"es el de mayor jerarquía. El axioma Ax_1 es denominado «axioma de unicidad» que expresa que si una misma implicación de probabilidad tuviera dos valores numéricos distintos entonces su clase de referencia debe ser vacía, pues, evidentemente, en **R** se cumple que $(\bar{A}) = \phi$. El axioma Ax_2 expresa que la implicación lógica, expresada por la fórmula $(A \supset B)$, es un caso particular de la implicación de probabilidad, esto es, cuando esta última tiene **p = 1**. Anotamos que la afirmación recíproca no se cumple y además que la fórmula $A \supset B$ (sin paréntesis) expresa una clase compuesta y no una implicación lógica.

El axioma $\mathbf{Ax}_3$ expresa que cuando la clase de referencia no es vacía, el valor numérico de una implicación de probabilidad no puede ser menor que cero. Tanto $\mathbf{Ax}_2$ como $\mathbf{Ax}_3$ son conocidos como *axiomas de normalización*. Los axiomas $\mathbf{A}_4$ y $\mathbf{A}_5$ no requieren mayor explicación porque expresan las clásicas propiedades fundamentales de las probabilidades de una suma y de un producto, respectivamente. Es suficiente señalar que, a diferencia de otras presentaciones que recurren al metalenguaje del sistema, el axioma $\mathbf{A}_4$ incluye la condición de exclusión valiéndose solo de los medios expresivos de **R**.

Los axiomas de **R** son traducibles sin dificultad al lenguaje **P** con la única limitación de que $\mathbf{Ax}_1$ no es satisfactoriamente expresable en esta notación. Esto significa que el uso del lenguaje **P** hace necesario que la condición de unicidad, que es decisiva para asegurar la consistencia de **R**, sea añadida en este caso como una regla metalingüística. Esto, evidentemente, revela una cierta ventaja del lenguaje **I** como medio expresivo de **R**. Sin embargo, como veremos, el lenguaje **P** es más operativo. Los axiomas de **R** en el lenguaje **P** son:

L_1. $(A \rightarrow B) \rightarrow P(A, B) = 1$

L_2. $P(A, B.\ \overline{B}) = O$

L_3. $P(A, B) \geq O$

L_4. $[A.B \rightarrow \overline{C}] \supset [P(A, B \vee C) = P(A, B) + P(A, C)]$

L_5. $P(A, B.C) = P(A, B) . P(A.B, C)$

En este contexto es claro cuando el punto denota una conjunción de clase y cuando un producto aritmético.

Esta versión de los axiomas de **R** es algo diferente a la original. Las variantes están en L_1 y $\mathbf{L}_4$. Anotamos que la formulación general de la adición que usualmente emplean los matemáticos es derivable desde estos axiomas. Si se introdujera como hipótesis $P(A, B.C) \neq O$, esto conduciría a la negación por Modus Tollens del antecedente de $\mathbf{L}_4$ que es la condición de exclusión. La postulación de la condición de unicidad a nivel del metalenguaje hace innecesaria la postulación de existencia en $\mathbf{L}_3$ lo que si sea indispensable en Ax_3, pues la unicidad afirmada para este sistema presupone que la clase de referencia no es vacía. La formulación metalingüística de la unicidad puede ser enunciada así: «El valor p que corresponde a **P** (**A**, **B**) en **R** es único; esto es, si **P** (**A**,**B**) = **p** y **P** (**A**,**B**) = **q**, entonces **p** = **q**».

Usando el lenguaje P, los enunciados de los teoremas más conocidos de R son:

$$T1.\ R \vdash P(A, B) + P(A, \overline{B}) = 1 \text{ (Regla de Complemento)}$$

$$T2.\ R \vdash O \leq P(A, B) \leq 1 \text{ (Regla de Normalización)}$$

$$T3.\ R \vdash P(A, C) = P(A, B).P(A.B, C) + P(A, \overline{B}).P(A.\overline{B}, C) \text{ (Regla de Eliminación)}$$

$$T4.\ R \vdash 1 - \frac{1 - P(A\ C)}{- P(A, B)} \leq P(A.BC) \leq \frac{P(A, C)}{P(A, B)}$$

Si y solo si P (A,B) > O, P (A,C) < P (A,B) y 1 – P(A,C) < P(A,B). (Segunda Regla de Normalización).

T5. Si B_1 v B_2 v....vB_r es una disyunción completa y exclusiva (completa en el sentido de que puede ser entendida como un detallamiento de B v $\overline{B}$ y exclusiva porque sólo uno de sus componentes es verdadero), luego

$$R \vdash P(A,C) = \sum_{k=1}^{r} P(A,B_k).P(A.B_k,C)$$

T6. $R \vdash P(A,B \vee C) = P(A,B) + P(A,C) - P(A,B.C)$

(Regla Generalizada de *la Adición*).

T7. $R \vdash 0 \leq P(A,B) + P(A,C) - P(A,B,C) \leq 1$

T8. $R \vdash P(A,B \supset C) = 1 - P(A,B) + P(A,B).P(A,B.C)$

T9. $R \vdash P(A,B \equiv C) = 1 + P(A,B.C) - P(A,B \vee C)$

T10. $R \vdash P(A,\neg(B \leftrightarrow C)) = P(A,B) + P(A,C) - 2P(A,B.C)$
si asumimos $\neg(B \leftrightarrow C)$equivalente a $B \not\equiv C$

T11. $R \vdash P(A,B).P(A.B,C) = P(A,C).P(A.C,B)$

T12. **Teorema de Bayes** $R \vdash P(A.C,B) = \dfrac{P(A,B).P(A.B,C)}{P(A,B).P(A.B,C) + P(A,\overline{B}).P(A.\overline{B},C)}$

T12.1. Teorema de Bayes generalizado para una disyunción completa de r componentes

$$R \vdash P(A.C,B_k) = \frac{P(A,B_k).P(A.B_k,C)}{\sum_{i=1}^{r} P(A,B_i).P(A.B_i,C)}$$

T13. Teorema generalizado de Reducción

$$R \vdash P(A.B \vee C,D) = \frac{P(A,B.D) + P(A,C.D) - P(A,B.C.D.)}{P(A.B) + P(A,C) - P(A,B.C)}$$

Los teoremas 15 y 16 incluyen casos particulares, razón por la que sus enunciados los hemos reservado para la sección II de este artículo.

T17. R ⊢ Dadas dos clases B y C cualesquiera, estas no son independientes entre sí respecto de toda clase de referencia.

Se demuestra por contraejemplo probando que B y C no son independientes respecto de A. [B v C] tomada como clase de referencia.

Por tanto debe concluirse

P(A.[B v C]. B, C) ≠ P (A. [B v C], C)

T18. R ⊢ $P(A \vee \bar{A}, B) = P(B)$ (Teorema de probabilidad absoluta).

Se demuestra que A v Ā satisface la condición $(\forall i)\ (x_i \in D)$, esto es A v Ā es compacta.

T19. Dadas las clases $B_1, B_2, \ldots B_n$, el sistema completo de probabilidad para n clases tiene w componentes.

$$R \vdash w = 2n \,.\, 3^{n-1}$$

Sugerencia: Previamente debe demostrarse que el número u de probabilidades independientes para el cálculo de un sistema de n clases están sujetos a la condición

$$R \vdash u = 2^n - 1$$

El procedimiento de demostración

En esta sección se presenta la deducción de los principales teoremas derivables de la axiomatización propuesta por Reichenbach.

Teorema 1. Regla del complemento:

$$P(A, B) + P(A, \bar{B}) = 1$$

Demostración:

1. $(A \rightarrow B \vee \bar{B}) \rightarrow P(A, B \vee \bar{B}) = 1$ porque el antecedente es tautología

2. Sustituyendo C/B en $(A.\ B \rightarrow \bar{C})$ tenemos la condición de exclusión $(A.\ B \rightarrow \bar{B})$

3. $P(A, B \vee \bar{B}) = P(A, B) + P(A, \bar{B})$ por A_4

4. $P(A, B) + P(A, \bar{B}) = 1$

La regla obtenida en 4 permite derivaciones tales como (T.1.1) $P(A, \overline{B}) = 1 - P(A, B)$ Nótese que el paso 2 puede ser omitido si se considera la propiedad definida para clases $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Teorema 2. Primera regla de normalización:

$$0 \leqq P(A, B) \leqq 1$$

Demostración:

1. $P(A, B) \geq 0$ por A_3

2. $P(A, B) = 1 - P(A, \overline{B})$ por T1 y como $P(A, B)$ nunca es un número negativo por A_3

3. $P(A, B) \leq 1$

4. $0 \leq P(A, B) \leq 1$

Este teorema muestra cuales son los valores extremos asumibles por una probabilidad P (A, B) cualquiera. Es suficiente asumir que P (A, B) nunca es negativa y se puede demostrar que nunca es mayor que 1.

Teorema 3. Regla de eliminación:

$$P(A, C) = P(A, B).P(A.B, C) + P(A, \overline{B}).P(A.\overline{B}, C)$$

Demostración:

Este teorema supone la validez de la tautología

$$([B \vee \overline{B}].C \equiv C)$$

Puesto que $P(A, [B \vee \overline{B}] . C) = P(A, C)$, debido a (1); luego es posible calcular directamente P(A, C), eliminado el componente $\overline{B} \vee B$ de la siguiente manera.

1. $P(A, C) = P(A, [B \vee \overline{B}] . C) = P(A, B . C \vee \overline{B} . C)$

2. $P(A, C) = P(A, B .C) + P(A, \overline{B} .C)$

3. $P(A, C) = P(A, B) . P(A. B, C) + P(A,\overline{B}) . P(A. \overline{B}, C)$

Desde T. 3· puede derivarse como consecuencia inmediata pero de importancia

$$T.3.1\ P(A.\overline{B},C) = \frac{P(A,C) - P(A,B).P(A.B,C)}{1 - P(A,B)}$$

La validez de T. 3. 1, obviamente está restringida a la condición P (A, B) < 1.

Teorema 4. Segunda regla de normalización

$$1 - \frac{1 - P(A\,C)}{P(A,B)} \leq P(A.BC) \leq \frac{P(A,C)}{P(A,B)}$$

Demostración:

1. Desde (T. 3) se deduce

a) $P(A, C) \geq P(A, B).P(A.B, C)$

$P(A, C) \geq P(A,\overline{B}).P(A.\overline{B}, C)$

2. Por (a) los numeradores de T.3.1 y (b) nunca son menores que cero, luego

$$b)\ P(A.B,C) = \frac{P(A,C)}{P(A,B)} - \frac{P(A,\overline{B}).P(A.\overline{B},C)}{P(A,B)}$$

$$3.\ P(A.B,C) \leqq \frac{P(A,C)}{P(A,B)}$$

que se cumple si **P (A, B) > 0** y **P (A, C) < P (A, B)**, lo primero para evitar la indeterminación y lo segundo para prohibir valores iguales a 1, lo que impide (b) cuando $P(A,\overline{B}.C) > 0$

4. Sustituyendo en T.3 $\overline{C}$ en lugar de C $P(A,\overline{C}) = P(A,B).P(A.B,\overline{C}) + P(A,\overline{B}).P(A.\overline{B},\overline{C})$
Dividiendo ambos miembros por P(A, B)

$$5.\quad \frac{P(A,\overline{C})}{P(A,B)} = \frac{P(A,B).P(A.B,\overline{C}) + P(A,\overline{B}).P(A.\overline{B},C)}{P(A,B)}$$

6. Desdoblando el segundo componente en dos fracciones y trasladando términos

$$\frac{P(A,\bar{C})}{P(A,B)} - \frac{P(A,\bar{B}).P(A.\bar{B},C)}{P(A,B)} = \frac{P(A.B).P(A.B,\bar{C})}{P(A,B)}$$

7. $$\frac{P(A,\bar{C})}{P(A,B)} - \frac{P(A,\bar{B}).P(A.\bar{B},\bar{C})}{P(A,B)} = 1 - P(A.B,C)$$

Trasladando términos y cambiando de signo

8. $$\frac{P(A.B,C)}{P(A,B)} = \frac{1 - P(A,\bar{C}) + P(A,\bar{B}).P(A.\bar{B},C)}{P(A,B)}$$

9. $$P(A.B,C) \geq \frac{P(A,\bar{C})}{P(A,B)}$$

10. $$P(A.B,C) \geq 1 - \frac{1 - P(A,C)}{P(A,B)}$$

11. Por los resultados obtenidos en (3) y (10) se tiene

$$1 - \frac{1 - P(A,C)}{P(A,B)} \leq P(A.B,C) \leq \frac{P(A,C)}{P(A,B)}$$

Esta desigualdad, que denominamos Segunda regla de normalización, está sometida a las restricciones indicadas en (3) y a **1 – P (A C) < P (A, B)**. Reichenbach la consigna en la pág. 79 de su libro, sin dar indicio de demostración de ella. Esta omisión no llamaría la atención si el autor no se hubiera esmerado antes en proporcionar demostraciones de otros teoremas sencillísimos.

Teorema 5. Regla de eliminación generalizada a r componentes:

$$P(A,C) = \sum_{k=1}^{r} P(A,B_k).P(A.B_k,C)$$

Demostración:

1. Sea B_1 v...v B_r, una disyunción exclusiva completa, esto es, uno y solo uno de sus componentes es verdadero y están especificadas todas las r-posibilidades lógicas en una situación dada. Por tanto B_1 v...v B_r es verdadera y puede ser considerada como el detallamiento de B v $\overline{B}$.

2. Desde (1) tenemos

$$([B_1 v \ldots v\ B_r] \,.\, C \equiv C)$$

3. $P(A, C) = P(A, [B_1\ v \ldots v\ B_r] \,.\, C)$

4. $P(A, C) = P(A, B_1 \,.\, C\ v \ldots v B_r.\ C)$

5. $$P(A, C) = \sum_{k=1}^{r} P(A, B_k.\ C)$$

6. $$P(A, C) = \sum_{k=1}^{r} P(A, B_k) \,.\, P(A.\ B_k, C)$$

Teorema 6. Teorema general de la adición (para disyunciones exclusivas e inclusivas).

$$P(A, B\ v\ C) = P(A, B) + P(A, C) - P(A, B.\ C)$$

Demostración:

Dada la equivalencia tautológica

$$(B\ v\ C) \equiv B.\ C\ v\ \overline{B}.\ C\ v\ B.\ \overline{C})$$

$$P(A, B\ v\ C) = P(A, B.\ C\ v\ \overline{B}.\ C\ v\ B.\ \overline{C})$$

$$P(A, B\ v\ C) = P(A, B.\ \overline{C}) + P(A, \overline{B}.\ C) + P(A, B.\ \overline{C})$$

Puesto que $P(A, B) = P(A, B.\ [C\ v\ \overline{C}])$ y $P(A, C) = P(A, [B\ v\ \overline{B}].\ C)$ por la tautología usada en T.3.1.

$$P(A, B) = P(A, B.\ C) + P(A, B.\ \overline{C})$$

$$P(A, C) = P(A, B.\ C) + P(A, \overline{B}.\ C)$$

Como sustituir en (3) los valores despejados desde (5) y (6) para $(A, B. \bar{C})$ y

$P(A, \bar{B}. C)$ equivale a sumar las ecuaciones 3, 5 y 6; luego

$$P(A, B \vee C) = P(A, B) + P(A, C) - P(A, B. C)$$

Consecuencias inmediatas de (5) y (6) de la demostración anterior son

T.6.1 $P(A, B. C) \leqq P(A, B)$

T.6.2 $P(A, B. C) \leqq P(A, C)$

Teorema 7. Los valores que se obtiene mediante el teorema general de la adición satisfacen el Teorema 2.

$$0 \leq P(A, B) + P(A, C) - P(A, B, C) \leq 1$$

Demostración:

Por T.4.

Por T.4. $1 - \frac{1 - P(A,C)}{P(A,B)} \leq P(A. B, C)$

$-\frac{1 - P(A,C)}{P(A,B)} \geq P(A. B, C) - 1$

$-(1 - P(A, C)) \geq (P(A. B, C) - 1). P(A, B)$

$P(A, C) - 1 \geq P(A. B, C) . P(A, B) - P(A, B)$

$P(A, B) + P(A, C) - 1 \leq P(A. B, C) . P(A, B)$

$P(A, B) + P(A, C) \geq P(A, B. C) + 1$

$P(A, B) + P(A, C) - P(A, B. C) \leq 1$

Por el axioma A.3, la expresión anterior satisface la desigualdad izquierda de T.2

Teorema 8. El valor de probabilidad de P (A, B → C) es determinable.

$$P(A, B \rightarrow C) = 1 - P(A, B) + P(A, B) + P(A, B. C)$$

Demostración:

1. Dada la equivalencia tautológica ($B \rightarrow C \equiv \overline{B} \vee C$)

2. $P(A, B \rightarrow C) = P(A, \overline{B} \vee C)$

3. $P(A, \overline{B} \vee C) = P(A, \overline{B}) + P(A, C) - P(A, \overline{B}. C)$

Por 1, b de T.4, tenemos

$P(A, B) . P(A. B, C) = P(A, C) - P(A, \overline{B}) . P(A. \overline{B}, C)$

Aplicando por L. 5 al componente P (A, B. C) de (3) y sustituyendo valores en 3 en atención a (4),

5. $P(A, \overline{B} \vee C) = P(A, \overline{B}) + P(A, B) . P(A. B, C)$
6. $P(A, B \rightarrow C) = 1 - P(A, B) + P(A, B) . P(A. B, C)$

Teorema 9. El valor de probabilidad de P (A, B ≡ C) es determinable

$$P(A, B \equiv C) = 1 + P(A, B. C) - P(A, B \vee C)$$

Demostración:

1. Por la tautología, ($[B \equiv C] \equiv [B. C \vee \overline{B}. \overline{C}]$)

2. $P(A, B \equiv C) = P(A, B. C) + P(A, B. C)$

3. Puesto que $P(A, \overline{B}. \overline{C}) = P(A, \overline{B \vee C})$ por tautología de De Morgan

4. $P(A, B \equiv C) = P(A, B. C) + 1 - P(A, B \vee C)$

5. $P(A, B \equiv C) = 1 + P(A, B. C) - P(A, B \vee C)$

Teorema 10. El valor de probabilidad de P (A, B ≢ C) es determinable, donde el signo '≢' es la disyunción exclusiva.

$$P(A, \neg (B \leftrightarrow C)) = P(A, B) + P(A, C) - 2\, P(A, B.C)$$
$$\text{si asumimos } \neg (B \leftrightarrow C) \text{ equivalente a } B \not\equiv C$$

Demostración:

Asumamos $([B \not\equiv C] \equiv (\overline{[B \equiv C]})$

$$P(A, B \not\equiv C) = P(A, \overline{B \equiv C})$$

$$P(A, \overline{B \equiv C}) = 1 - (1 + P(A, B.C) - (P(A, B) + P(A, C) - P(A, B.C))$$

$$P(A, B \not\equiv C) = P(A, B) + P(A, C) - 2\, P(A, B.C)$$

Los teoremas T.6, T.8, T.9 y la consecuencia T.1.1 son propuestos sin desarrollar en el parágrafo 35 del libro *Experience and Prediction*. Recalcamos que el interés de los teoremas mencionados radica en que se calculan probabilidades para clases determinadas por operadores estrictamente lógicos.

Teorema 11. Regla del producto.

$$P(A, B).P(A.B, C) = P(A, C).P(A.C, B)$$

Demostración:

Puesto que la regla de sustitución se cumple en este sistema formal como en cualquier otro, L.5 es simétrico con respecto a B y C,

1. P (A, B.C) = P (A, B) . P (A. B, C) = P (A, C) . P (A. C, B)

La ecuación

2. P (A, B) . P (A. B, C) = P (A, C) . P (A. C, B), se denomina regla del producto.

De ella se siguen las consecuencias inmediatas

T.11.1 $\frac{P\,(A.B,C)}{P\,(A.C,B)} = \frac{P\,(A,C)}{P\,(A,B)}$

T.11.2 $\frac{P\,(A.C,B)}{P\,(A,B)} = \frac{P\,(A.B,C)}{P(A,C)}$

T.11.3 desde (2)

$$P\,(A.\,C,B) = P\,(A.\,B,C)\,\frac{P\,(A,B)}{P\,(A,C)}$$

T.11.4 sustituyendo $\bar{C}$ por C en T.11.3

$$P\,(A.\,\bar{C},B) = [1 - P\,(A.\,B,C)\,]\,\frac{P\,(A.B)}{1 - P\,(A,C)}$$

El detallamiento anterior tiene por objeto demostrar que todos los valores determinables mediante L.4, L.5, T.1, T.4, T.6, T.8, T.9, T.10, T.11 y sus consecuencias, son determinables si se conocen los de

$$P\,(A,B),\ P\,(A,C),\ P\,(A.B,C)$$

Teorema 12. Regla para la probabilidad de una hipótesis o regla de Bayes

$$P\,(A.\,C,B) = \frac{P(A,B).\,P(A.\,B,C)}{P(A,B).\,P(A.\,B,C) + P(A,\bar{B}).\,P(A.\,\bar{B},C)}$$

Demostración:

Por T.11.3 y T.3

$$P\,(A.\,C,B) = \frac{P(A,B)\,.P\,(A.B,C)}{P\,(A.B)\,.P\,(A.B,C) + P\,(A.B)\,.P\,(A.\bar{B},C)}$$

Si al sustituir el denominador de T.11.3 usamos T.5 que es la generalización de T.3, tenemos

$$P\,(A.\,C, B_k) = \frac{P\,(A, B_k)\,.\,P\,(A.\,B_k, C)}{\sum_{i=1}^{r} P\,(A, B_i)\,.\,P\,(A.\,B_i, C)}$$

Donde el subíndice k es un valor del intervalo abierto 1.....r y la disyunción B v $\overline{B}$ ha sido detallada por B_1 v ....v B_r.

La teoría clásica de la probabilidad vio en esta regla el método de descubrir nuevas probabilidades. Con la ayuda del «principio de indiferencia» se asumía ingenuamente que si no existía información entonces todas las probabilidades P (A, B_i) eran iguales y se les denominó «probabilidades a priori».

Evidentemente sin no se conocen las P (A, B_i) la ecuación queda indeterminada, pues tampoco podemos tomar P (A, B_k).

Por la forma de P (A. C, B_k) también se denomina a T.12, regla de la probabilidad inversa.

Teorema 13. Regla de reducción.

$$P(A.\,[B1 \vee \ldots \vee B_m], D) = \frac{\sum_{k=1}^{m} P\,(A, B_k)\,.\,P(A.\,B_k, D)}{\sum_{k=1}^{m} P\,(A, B_k)}$$

1. Si B v C es una disyunción exclusiva no completa con respecto a A, luego

A. [B v C] no se reduce A, pues no sabemos exactamente si B v C es verdadera.

2. Por R. 5 $P\,(A.\,B, D) = \dfrac{P\,(A.\,B.\,D)}{P(A, B)}$

Demostración:

Sustituyendo B v C por B en (2)

$$P\,(A.\,[B \vee C], D) = \frac{P\,(A, [B \vee C]\,.\,D}{P\,(A.\,B \vee C)} = \frac{P\,(A, B.\,D \vee C.\,D)}{P\,(A, B \vee C)}$$

4. Desarrollando por L. 5 P (A, B. D) y P (A, C. D),

$$P\,(A.\,[B \text{ v } C], D) = \frac{P\,(A,B).\,P\,(A.\,B,D) + P\,(A,C)\,.\,P\,(A.\,C,D)}{P\,(A,B) + P\,(A,C)}$$

Esta regla se denomina de reducción porque la clase de referencia se obtiene cancelando un $\mathbf{B_i}$ en A. $\mathbf{[B_1v....vB_r]}$, de tal modo que obtenemos A. $\mathbf{[B_1v....v\ B_m]}$ donde m < r y r es el número de componentes de una disyunción exclusiva completa. Por tanto, mientras A. $\mathbf{[B_1v....v\ B_r]}$ equivale a A, en cambio A. $\mathbf{[B_1v....vB_m]}$ no equivale a A. Se ha reducido pues el número de componentes de $\mathbf{B_1v....vB_r}$.

Teorema 14. Regla de reducción generalizada a m componentes disyuntivos exclusivos.

$$P\,(A.\,B \text{ v } C, D) = \frac{P(A,B.\,D) + P(A,C.\,D) - P\,(A,B.\,C.\,D.)}{P(A.\,B) + P(A,C) - P(A,B.\,C)}$$

Demostración:

De acuerdo a la nota adjunta a T.13, consideramos que el teorema anterior ha sido demostrado para m = r. Toca ahora generalizarlo a cualquier número m, con la limitación m < r.

$$1.\,P\,(A.\,[B_1 v \ldots . vB_m]\,, D = \frac{\sum_{k=1}^{m} P\,(A,B_k)\,.\,P(A.\,B_k,D)}{\sum_{k=1}^{m} P\,(A,B_k)}$$

Si tomamos $B_1v....vB_r$, entonces tenemos una consecuencia inmediata de T.14.

$$T.\,14.1\ P\,(A,D) = P(A.\,[B1_v \ldots . vB_m], D = \sum_{k=1}^{r} P\,(A,B_k)\ P(A.\,B_k,D)$$

que es una versión coincidente con T.5.

Sin embargo, insistimos aun siendo obvio, que el valor de T.14 para m < r no es igual al de P (A, D). Omitimos el denominador porque al ser una disyunción completa, es igual a 1.

T.14.2 1. Puesto que $\mathbf{B_1v....vB_m}$ es exclusiva luego $\mathbf{P(A.\ B_k\ ,\ B_k)} = 1$ y $\mathbf{P(A.\ B_k,\ B_i)} = 0$ si $\mathbf{k \neq i}$

2. Por (1) la probabilidad para un componente, denominada «probabilidad reducida» de la disyunción $B_1v...vB_m$, es

$$P\,(A.\,[B_1 v \ldots vB_m]\,, B_k) = \frac{P\,(A,Bk)}{\sum_{k=1}^{m} P\,(A,B_i)}$$

T.14.3 La sumatoria de las probabilidades reducidas es igual a 1, pues

$$\sum_{k=1}^{m} P\,(A.\,[B_1 v \ldots . vB_m]\,, B_k) = P\,(A.\,[B_1 v \ldots . vB_m]\,, [B_1 v \ldots . vB_m]) = 1$$

Teorema 15. Regla de reducción ampliada para disyunciones inclusivas.

Demostración:

1. Por T.13, línea (3)

$$P\,(A.\,[B \text{ v } C], D) = \frac{P\,(A, B.D \text{ v } C.\,D)}{P\,(A, B \text{ v } C)}$$

2. Aplicando T.6 a (1)

$$P\,(A.\,[B \text{ v } C]\,, D) = \frac{P\,(A, B.\,D) + P\,(A, C.\,D) - P\,(A, B.\,D.\,C)}{P(A, B) + P\,(A, C) - P(A, B.\,C)}$$

Consecuencia inmediata de T.15 es su aplicación al cálculo de probabilidades reducidas.

T.15.1 Reemplazando en T.15 B en lugar de D,

$$P\,(A.\,[B \text{ v } C], B) = \frac{P\,(A, B).\,P(A.\,B, B) + P\,(A, C)\,P\,(A.\,C, B) - P(A, B)\,.\,P\,(A.\,B, C).\,P\,(A.\,B.\,C, B)}{P(A, B) + P\,(A, C) - P(A, B)\,.\,P\,(A.\,B, C)}$$

Dado que: (a) P (A. B, B) = 1, pues (A. B ➔ B) es tautología

P (A, C) . P (A. C, B) = P (A, B) . P (A. B, C)

$$P\,(A.\,[B \text{ v } C]\,, B) = \frac{P\,(A, B)}{P(A, B) + P\,(A, C) - P(A, B)\,.\,P\,(A.\,B, C)}$$

T.15.2 Sustituyendo en T.15.1 C en lugar de B podemos encontrar

$$P\,(A.\,[B \text{ v } C]\,, C) = \frac{P\,(A, C)}{P(A, B) + P\,(A, C) - P(A, B)\,.\,P\,(A.\,B, C)}$$

Teorema 16. Teorema de multiplicación cuando las clases B y C son independientes.

1. Consideremos P (A. B, C) = P (A, C) como condición de independencia.

2. Por A. 5 y (1), tenemos P (A, B. C) = P (A, B) . P (A, C)

Demostración:

Es claro que la condición de independencia de B y C siempre se formula con respecto a una determinada clase de referencia. Puede ser el caso que B y C no sean independientes respecto de la clase de D, por ejemplo.

Asumiendo la condición de independencia, se tienen las siguientes consecuencias inmediatas.

T.16.1 El teorema T.6 se transforma en

$$P\,(A, B \vee C) = P\,(A, B) + P\,(A, C) - P\,(A, B)\,.\,P\,(A, C)$$

T.16.2 El teorema T.15 se transforma en

$$P\,(A.\,[B \vee C]\,, D) = \frac{P\,(A, B.\,D) + P\,(A, C.\,D) - P\,(A, B.\,C.\,D)}{P(A, B) + P\,(A, C) - P(A, B)\,.\,P\,(A, C)}$$

T.16.3 La consecuencia T.15.2, debido a T.11, se transforma en

$$P\,(A.\,[B \vee C]\,, C) = \frac{P\,(A, C)}{P(A, B) + P\,(A, C) - P(A, B)\,.\,P\,(A, C)}$$

Teorema 17. Dadas dos clases cualesquiera B y C, estas no son independientes entre si con respecto a toda clase de referencia.

Demostración:

1. Si B y C fueran independientes entre sí respecto de toda clase de referencia, entonces lo serían respecto de A. [B v C].

2. Si se cumpliera (1), luego se cumpliría

$$P\,(A.\,[B \vee C]\,.\,B, C) = P\,(A.\,[B \vee C]\,, C)$$

3. Por T.16.3, tenemos

$$P\,(A.\,[B \vee C]\,,C) = \frac{P\,(A,C)}{P(A,B) + P\,(A,C) - P(A,B)\,.\,P\,(A,C)}$$

En esta ecuación para P (A. B) = P (A, C) = 1, el caso extremo superior, es igual a P(A, C). En los otros casos menores que uno pero diferentes de cero, el numerador P (A, C) se multiplicará al ser dividido por un número menor que 1. Por tanto si tomamos las condiciones P (A, B) < 1 y P (A, C) < 1

$$4.\ \frac{P\,(A,C)}{P(A,B) + P\,(A,C) - P(A,B)\,.\,P\,(A,C)} > P\,(A,C)$$

5. P (A. [B v C] , C) > P (A, C)

6. Dada la tautología ([B v C] . B = B)

P (A. [B v C] . B, C) = P (A. B, C) ≡ P (A, C)

Supuesta la independencia de B y C respecto de A, pues de lo contrario no tendría sentido el teorema.

Por (5) y (6)

7. P (A. [B v C] . B, C) < P (A. [B v C] . C)

La desigualdad de (7) muestra que no se cumple la igualdad de (2). Por tanto existe una clase de referencia A. [B v C] respecto de la cual no son independiente B y C. La importancia teórica de este teorema es notable. Establece claramente la necesidad de una clase de referencia para hablar de independencia en el cálculo de las probabilidades. La relación de independencia es así de carácter triádico, en este caso, entre B y C con respecto de A.

Teorema 18. Teorema de la probabilidad absoluta. R ⊢ P (A v Ā, B) = P (B)

Demostración:

Tenemos que $(\forall i)\,(x_i \in A \vee \bar{A})$, es analíticamente verdadera y, por tanto, es una secuencia compacta porque asumir que existe al menos un x_i que no pertenece a A v Ā conduce a contradicción, pues este x_i resultaría perteneciendo a la clase vacía.

Si en **P (A, B)**, la clase A es compacta, pues se cumple **($\forall$i) ($x_i \in$ A)**; luego A puede ser sustituida por la clase siempre compacta A v $\bar{A}$, que puede ser omitida para hablar simplificadamente de probabilidades absolutas en el sentido de relativas a **A v $\bar{A}$**. En consecuencia **P (A, B) = P (A v $\bar{A}$, B) = P (B)**

Asumiendo que su clase de referencia cumple **($\forall$i) ($x_i \in$ A)** podemos, de acuerdo a T.18, reformular los teoremas T.1, T.3, T.6, T.11 y T.15, en el mismo orden, de la siguiente manera.

T.18.1 P (B) + P (B) = 1

T.18.2 P (C) = P (B) . P (B, C) + P ($\bar{B}$) . P ($\bar{B}$, C)

T.18.3 P (B v C) = P (B) + P (C) – P (B. C)

T.18.4 P (B. C) = P (B) . P (B, C) = P (C) . P (C, B)

T.18.5 Desarrollando T.15 por T.18.4, tenemos

$$P(B \vee C, D) = \frac{P(B).P(B,D) + P(C).P(C,D) - P(B).P(B,C).P(B.C,D)}{P(B) + P(C) - P(B).P(B,C)}$$

De T.18.5 puede deducirse la ecuación correspondiente a los casos en que B excluye a C y conversamente **C** a **B**. Es suficiente considerar **P (B, C) = o**

Teorema 19. Dado un número n de clases; **B_1, B_2, ...B_n**, las combinaciones hechas con ellas y con sus respectivas clases complementarias generan el **sistema completo de probabilidad para n clases**. El número **w** de componentes de dicho sistema es calculable, recurriendo a los coeficientes binómicos, por la fórmula

$$w = \sum_{m=1}^{n} \binom{m}{n} m . 2^m = 2n. 3^{n-1}$$

Demostración:

La demostración de esta fórmula, aunque podría ser consignada inmediatamente a continuación de ella, será más fácilmente esbozada aprovechando lo que sigue.

A continuación expondremos, como consecuencia de T.19, uno de sus ejemplos posibles. Así tendremos ocasión de examinar algunas de las propiedades importantes de un sistema completo de probabilidades.

T.19.1 (1) De acuerdo a T19, el sistema completo de probabilidades construible con las clases B y C tiene los doce componentes siguientes.

$P(B)$	$P(\bar{B})$	$P(C)$	$P(\bar{C})$
$P(B, C)$	$P(\bar{B}, C)$	$P(C, B)$	$P(\bar{C}, B)$
$P(B, \bar{C})$	$P(\bar{B}, \bar{C})$	$P(C, \bar{B})$	$P(\bar{C}, \bar{B})$

(2) Usando como datos o probabilidades independientes a P (B), P (C) y P (B, C), puede determinarse mediante T.18.1 – T.18.5 el valor de todo componente del sistema. Valiéndonos, por ejemplo, de T.18.4, derivamos como consecuencia inmediata

$$\frac{P(B, C)}{P(C, B)} = \frac{P(C)}{P(B)}$$

Esta fórmula nos permite precisar, desde los datos, el valor de **P (C, B)**. Agregamos que a las probabilidades que se encuentran en una relación análoga a la de **P (B, C)** con respecto a su conversa **P (C, B)**, se les denomina probabilidades mutuas. Cuando las probabilidades contienen clases complementarias para decidir su valor se usa T.18.2.

(3) El número v de probabilidades independientes o datos necesarios para calcular los valores de todas las probabilidades del sistema, se obtiene de la manera a continuación señalada: (i) considérese una probabilidad absoluta $P(B_i)$ por cada una de las n clases; (ii) por cada subconjunto de m clases, una probabilidad debe ser dada. De acuerdo a lo precedente, el número de probabilidades independientes es igual al número de subconjuntos menos uno, que se pueden formar con un conjunto de n miembros. El subconjunto que restamos es, obviamente, el vacío. Por tanto, el número v es determinable por medio de la fórmula

$$v = \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{m}{n}\right) = 2^n - 1$$

Si asumimos que el ejemplo de (1) lo hemos construido sin conocer T.19, por inspección; entonces la fórmula anterior puede ser el punto de partida para reducir T.19. Para realizar este propósito basta añadir que por cada subconjunto de m clases hay m probabilidades afirmativas (si se escribe cada una de las m clases en el lugar de clase atributo) y que cada clase tiene su respectiva clase complemento. Por tanto cada probabilidad afirmativa genera 2^m probabilidades distintas, lo que se expresa matemáticamente

$$\sum_{m=1}^{n} \left(\frac{m}{n}\right) . m . 2^m = 2n. 3^{n-1} = w$$

(4) Para n > 2, la fórmula de (2) la generalizamos a

$$\frac{P\,(Bk_1 \ldots Bk_{m-1}, Bk_m)}{P\,(Bk_1 \ldots Bk_{m-2}. Bk_m, Bk_{m-1})} = \frac{P\,(Bk_1 \ldots Bk_{m-2}, Bk_m)}{P\,(Bk_1 \ldots Bk_{m-2}, Bk_{m-1})}$$

El establecimiento de P (B), P (C) y P (B, C) como probabilidades independientes es convencional. Existe la posibilidad de deducir P (B) y P (C) desde P (B. C), P (C, B), P (B, C). Para lo anterior basta

$$P\,(B) = \frac{P\,(C, B) . P\,(\overline{B}, C)}{P\,(B, C)\,(1 - P\,(C, B)) + P\,(C, B) - P\,(\overline{B}, C)}$$

$$P\,(C) = \frac{P\,(B, C) . P\,(\overline{B}, C)}{P\,(B, C)\,(1 - P\,(C, B)) + P\,(C, B) - P\,(\overline{B}, C)}$$

Estas fórmulas son deducibles de T.18.4 mediante tres sustituciones sucesivas. Para estas sustituciones se usan como probabilidades independientes P (B, C) , P (C, B) , P (, C). La resolución de las ecuaciones obtenidas para P (B) y P (C) da lugar a los resultados arriba mostrados.

Comentario final

El sentido de haber presentado de manera detallada el desarrollo deductivo de un sistema de cinco axiomas y diecinueve teoremas de la Teoría elemental de la probabilidad, ha sido poner en evidencia propiedades de su lógica subyacente que normalmente son obviadas en sus aplicaciones prácticas. Aunque el sistema de axiomas y de reglas de deducción de Reichenbach que hemos adoptado tienen más de 50 años de discusión en los medios especializados que se expresan en Alemán o en Inglés, nos ha parecido pertinente presentar, con algunas modificaciones de nuestra parte, una reconstrucción lógica que, hasta donde estamos informados, es poco común en lengua castellana pese a que tiene notables potencialidades para mostrar y ejemplificar el poder esclarecedor, articulador y reorganizador de la lógica en la construcción axiomática de las teorías matemáticas.

VI. INTELIGENCIA ARTIFICIAL

Lógica e inteligencia artificial

Introducción

Comenzaremos esta exposición señalando que compartimos los puntos de vista que consideran la expresión «inteligencia artificial» una metáfora, la misma que, a nuestro juicio, ha sido, en algunos aspectos, productiva para el desarrollo de la ciencia y para el análisis filosófico y, en otros, ha dado lugar a analogías que pueden conducir a confusiones y entusiasmos reveladores de una ausencia de reflexión fundada en la teoría de autómatas, la misma que posibilita un conocimiento de los alcances y limitaciones teóricas de los mismos.

En esta ponencia pretendemos dar fundamento a la tesis que sostiene que la metáfora, más específica que la antes mencionada y que afirma una especie de paralelismo funcional entre la mente humana y el ordenador, adolece de una limitación fundamental, cuya comprensión adecuada es decisiva para intentar explicar la capacidad específica del hombre de representar infinitos actuales, investigar secuencias no enumerables, y crear ficciones operacionales a partir de situaciones que para un ordenador de estados finitos son inviables. Dicha limitación consistiría fundamentalmente en el hecho de que, como demostraremos, el artificio de mayor potencia teórica, conocido como máquina universal de Turing, posibilita modelar o simular los procesos mentales con respecto a lo que es recursivamente computable pero no en relación con aquello que, en general, puede ser calificado de inteligible o comprensible. Y si bien es verdad que todo lo computable es también inteligible, la afirmación recíproca 'todo lo inteligible es computable' no es verdadera como lo muestra, por ejemplo, la existencia de conceptos matemáticos, como el de número cantoriano, que son claramente inteligibles pero no recursivamente computables. Asimismo, para facilitar la comunicabilidad de nuestra argumentación, hemos preferido las pruebas intuitivas y, de este modo, hemos reducido el simbolismo lógico matemático a un *minimum* accesible, sin dificultades, a un lector con formación académica pero no familiarizado con lo que suele denominarse el ámbito interdisciplinario de la inteligencia artificial.

Damos por asumido el hecho histórico de que el hombre, desde la antigüedad, ha construido máquinas con el propósito presunto de transferirles, en la mayor medida posible, la ejecución de lo que genéricamente se denomina trabajo, el mismo que demanda el consumo de lo que llamaremos energía de ejecución. Sin embargo, el hombre para usar las máquinas, según el menor o mayor nivel de desarrollo de las mismas, ha tenido que gastar cantidades variables de energía de dirección. Parecería que la tendencia histórica que ha orientado la construcción de las máquinas ha sido diseñarlas de tal modo que se tienda a minimizar la energía de dirección y a maximizar la energía de ejecución. En función de este criterio pionero de Pierre de Latil (1958) se puede distinguir al menos tres tipos de máquina.

Una máquina es de tipo 1 cuando la energía de mando está integrada a la energía de ejecución, es el caso de la palanca, el arado, o la bicicleta, entre otros. En estas máquinas el hombre tiene que hacer un esfuerzo sostenido para lograr que realicen el trabajo propuesto y la mayor o menor productividad del mismo depende de la cantidad de fuerza humana utilizada que es, al mismo tiempo, energía de dirección o de mando. Una máquina es de tipo 2 cuando la energía de mando es independiente de la energía de ejecución que puede ser, según sea el caso, la fuerza hidráulica, la eólica o la de un motor. Es el caso del molino tradicional, de un tractor, de una tejedora o de una impresora. Estas máquinas requieren de un operador que consume energía de mando a través de acciones físicas como manipular palancas o botones, que cumplen funciones análogas. Una máquina es de tipo 3 cuando su energía de mando ha sido reducida a la introducción de un conjunto finito de instrucciones, expresadas en un lenguaje **L**, que la máquina reconoce y acepta, realizando actos que, a su vez, son órdenes que pueden dar lugar a un trabajo que puede consumir cantidades masivas de energía de ejecución, como la cantidad de galones de carburante necesarios para hacer aterrizar un moderno avión comercial. Esta máquina se conoce como ordenador o computador y la realización de sus actos presupone, solo al comienzo del proceso, la presencia de un programador humano o no.

El hombre ha transferido las rutinas de ejecución física a las máquinas de los tipos 1 y 2, y las tareas de procesamiento de información, tales como cálculos aritméticos, así como las rutinas de dirección, a las máquinas de tipo 33. Estas últimas tareas implican con frecuencia la toma de decisiones entre estados posibles de la máquina, determinados por las informaciones de entrada que sus sensores reciben de su «ambiente», a través de instrucciones codificadas en un lenguaje no determinista.

Las máquinas del tipo 3 han sido calificadas de inteligentes y ha gravitado en ello el hecho de que simulan la conducta humana, en sus aspectos que la diferencian de los animales, debido a que son capaces de reconocer, aceptar o rechazar, determinadas secuencias de signos de un lenguaje **L**. En efecto, es la capacidad de comunicarse a través de la palabra lo que, desde Aristóteles, ha sido calificado de racionalidad humana y, en este sentido, las máquinas del tipo 3 no solo se comportan racionalmente sino que podrían ser la manifestación más lograda de lo que los filósofos de la escuela de Frankfurt han llamado razón instrumental.

Los desarrollos notables en el conocimiento de las gramáticas capaces de generar los lenguajes de máquina (*software*), con independencia de referencias específicas a su naturaleza o estructura física (*hardware*), han conducido a campos de especialización distinguibles y, en grado significativo, independizables. De este modo, los problemas de *software* admiten un tratamiento separado de los de *hardware*. Esta diferenciación ha despertado el entusiasmo de muchos psicólogos y psiquiatras, que han visto en esta analogía la posibilidad teórica de estudiar las denominadas funciones psicológicas superiores, como el pensamiento y el uso del lenguaje, con independencia de referencias neurológicas específicas. De esta manera, para la investigación del «*software* humano», se ha buscado analogías funcionales en modelos como la máquina de Turing, que no constituye un artefacto sino un modelo matemático teórico del comportamiento aunque no de la estructura de un artificio capaz de computar secuencias de signos conocidas como funciones recursivas.

Máquina de Turing

Puede considerarse que una máquina de Turing (en adelante Tm) es un artificio matemático definido en términos que lo capacitan para entender un lenguaje L. Puede presentársela intuitivamente, como ocurre en algunos manuales de lógica y computación, o puede presentársela de modo axiomático dentro de una teoría general de autómatas finitos, como un caso particular, en la forma exhibida por trabajos rigurosos como el de Hopcroft y Ullman, titulado *Formal Languages and their relation to Automata*. En todo caso no es fácil presentar adecuadamente una Tm, aun intuitivamente, sin entrar en detalles que pueden ser monótonos pero necesarios para no afectar la corrección del planteamiento. Por ello nos ha parecido adecuada la presentación hecha por Kleene (1968) en su libro *Introduction to Mathematical Logic* (p. 232 y ss.), razón por la que pretenderemos exponerla, con leves modificaciones, en lo que sigue.

Una Tm es una idealización que se diferencia del **ordenador** o del computador humano en al menos dos aspectos sustantivos:

1) Una Tm es infalible en el sentido de que obedece las instrucciones sin desviación alguna; y

2) Una Tm tiene una memoria potencialmente infinita.

Asumiremos que operamos nuestra Tm en una sucesión de instantes $\mathbf{I_0}$, $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$,....y que la sucesión $\mathbf{q_1}$, $\mathbf{q_2}$,....$\mathbf{q_k}$, de estados que puede tomar nuestra Tm, es finita.

Si consideramos el estado pasivo como el estado $\mathbf{q_0}$, o de máquina sin funcionamiento, entonces nuestra Tm tiene **k+ 1** estados y en cada instante puede tomar cualquiera de ellos. Ella consiste de una cinta dividida en cuadraditos o celdas, la misma que por razones de simplicidad la consideramos potencialmente infinita solo hacia la derecha. Cada celda puede estar en blanco, en cuyo caso asumiremos que se ha impreso en ella el símbolo $\mathbf{S_0}$, o puede tener impreso uno de los símbolos $\mathbf{S_1}$, ... $\mathbf{S_j}$ de un alfabeto finito. Por razones de comodidad reduciremos este alfabeto al conjunto **{B,1}**. La letra **B** significará «cuadradito en blanco.» Así existirán solo dos condiciones para cada cuadradito, o tiene impreso un **1**, o tiene impresa una **B** (lo segundo equivale a estar en blanco).

Asimismo, en cada instante, a partir del instante $\mathbf{I_0}$, la Tm escruta solo un cuadradito. Para producir la transición de un instante dado al siguiente, la Tm realiza un ***acto***, el mismo que consiste de una secuencia de tres operaciones: **a)** Imprime uno de los símbolos del conjunto **{B,1}** en el cuadradito escrutado o intercambia uno por otro. En este caso, eliminar **B** para imprimir **1** equivale a escribir **1** en un cuadradito en blanco; y eliminar 1 para imprimir **B**, equivale a simplemente borrar **1** y dejar la celda en blanco; **b)** La Tm se mueve solamente una celda a la derecha o una celda a la izquierda o permanece estacionaria (centrada); **c)** Cambia a otro estado o permanece en el mismo. Una ***configuración*** consiste en el estado de la Tm y el símbolo que está impreso en la celda escrutada en un instante dado. Cada acto que la Tm realiza en un instante dado está determinado por la ***configuración*** de la Tm en el instante inmediato anterior. A la totalidad de los signos impresos en la cinta de la Tm junto con la configuración se le denomina ***situación.***

Nuestra Tm opera de izquierda a derecha. La cinta es finita por la izquierda y potencialmente infinita por la derecha. Solamente en el caso de que la celda escrutada sea la «más izquierda», una configuración que ordene un desplazamiento a la izquierda no determinará un ***acto***.

Para computar el valor **y** para la función **f(x)** es necesario asumir el instante $\mathbf{I_0}$ como el instante en que la Tm y su cinta están listas: la celda del extremo izquierdo de la cinta está en blanco y a su derecha el valor de **x** está representado por **x + 1** apariciones de **1ε{B,l}** en **x + 1** celdas. La Tm está escrutando la celda impresa «más a la derecha» y diremos que la Tm computa un valor **y** para el argumento **x** si partiendo de la situación que corresponde al instante $\mathbf{I_0}$, la Tm, después de un número finito de instantes posteriores, toma el estado pasivo $\mathbf{q_0}$ con una **B** en la cinta, la misma que a su izquierda tiene las **x + 1** apariciones de 1 ε{B,l} que representan el valor de **x**, y a su derecha tiene las **y + 1** apariciones de **1ε {B,l}** que representan el valor de **y**; todas las otras celdas están en blanco y la Tm nuevamente está en la posición de escrutar la celda impresa que está «más a la derecha» (reiteramos que a la celda con una **B** no la consideramos impresa sino en blanco o borrada). Asimismo, para indicar la celda que está escrutada por la Tm escribimos un número sobre ella que, además, indica el número del estado en el que se encuentra la Tm. En el caso de que para cada valor de **x**, la Tm compute un valor **y**, entonces diremos que **f(x)** es una función Tm computable. En particular nos interesa **f(x) =x + 1,** esto es, la función sucesor.

Por ejemplo, si nuestra Tm es aplicada al número natural **1** como argumento, la situación de Tm lista, en el instante $\mathbf{I_0}$ puede representarse como sigue:

		1			
B	1	1	B	B	B

El 1 de la parte superior muestra que la celda escrutada es la tercera, y que la Tm está en su primer estado activo $\mathbf{q_1}$. Asimismo, en el estado $\mathbf{q_1}$ la celda escrutada es aquella que está impresa y se encuentra más a la derecha. Las siguientes están en blanco. Las dos apariciones de **1ε{B,l}** representan, por convención, el valor de **x**, que en este caso es el número natural **1**. En un instante posterior $\mathbf{I_r}$, la Tm habrá computado el valor **y = 2** (imprimiendo **y + 1** apariciones de **1ε{B,l}**) para el argumento **1**, puesto que **f(x)** es la función sucesor. La situación del instante $\mathbf{I_r}$ puede graficarse como sigue:

						0	
B	1	1	B	1	1	1	

A fin de mejorar nuestra comprensión de la naturaleza monótona y exhaustiva de cómo procede una máquina de Turing, en lo que sigue describiremos detalladamente una Tm*, específica, capaz de computar la función sucesor **f(x) = x + 1**, cuando el valor de **x** es igual

a **1**. Esta descripción consistirá en precisar para cada uno de los **k** estados activos de la Tm* y para cada una de las dos condiciones posibles de la celda escrutada, **B, 1,** cuál es el acto que debe ser realizado por la Tm* en un instante I_i dado, lo que equivale a hacer explícito un conjunto de instrucciones condicionales a través de una tabla **(T1)** de doble entrada para sus $q_1, q_2, \ldots q_{11}$ estados posibles y para sus dos condiciones posibles, **B, 1**, para cada una de las celdas escrutadas. Ello equivale al producto cartesiano de $\{q_1, \ldots, q_{11}\} \times \{B,1\}$.

Cada instrucción es una n-tupla de la lista de símbolos **P, E, L, C, R** que termina en un número que señala el estado que debe asumir la Tm* en el siguiente instante. **P** es una abreviación de «imprimir», **E** de «borrar», **L** de «mover una celda a la izquierda», **C** de «no mover» o «centrar» y **R** de «mover una celda a la derecha.»

Tabla T1

Estados de Tm*	**Condición de la celda escrutada**	
	B	**1**
q_1	**CO**	**R2**
q_2	**R3**	**R9**
q_3	**PL4**	**R3**
q_4	**L5**	**L4**
q_5	**L5**	**L6**
q_6	**R2**	**R7**
q_7	**R8**	**ER7**
q_8	**R8**	**R3**
q_9	**PR9**	**L10**
q_{10}	**CO**	**ER11**
q_{11}	**PCO**	**R11**

Los estados de la Tm* pueden entenderse como un conjunto de 11 instrucciones condicionales, cada una con dos componentes de la forma «Si **B**, entonces...», o de la forma «Si **1**, entonces, ...». Estas instrucciones se cumplen en 25 actos correspondientes a 25 instantes, siendo el primero de ellos $\mathbf{I}_0$, tal como se especifica en la tabla **T2**.

El hecho de que el número de actos no coincida con el número de estados de la Tm* se explica porque hay instrucciones que ordenan volver al mismo estado (esto es, hacer un *loop*) al pasar de un acto a otro, o, también hay otras que ordenan un *feedback* (es el caso de $\mathbf{q}_6$ que dice «Si **B**, entonces **R2**» y de $\mathbf{q}_8$ que dice «Si **1**, entonces **R3**»). La situación del instante $\mathbf{I}_{23}$ es la de vuelta al estado inactivo o de parada (*halting*). El acto de $\mathbf{I}_{24}$ es solo una confirmación del estado de parada. Los *loops* y *feed backs* puedan apreciarse en el diagrama de flujo $\mathbf{D}_1$, que equivalente a la Tabla **T1**.

En términos generales, la Tm* es un artificio matemático que opera examinando exhaustivamente en la cinta el estado en que se encuentra, en un determinado instante, y la condición correspondiente de la celda escrutada, la cual puede ser **B** o **1**. El recorrido lo hace de izquierda a derecha y de derecha a izquierda, escrutando en cada acto sólo una celda, sin omitir ninguna, hasta alcanzar el estado $\mathbf{q}_0$ de parada. Durante este proceso imprime 'unos' y los borra, según lo ordenen las instrucciones, hasta llegar a la situación que se muestra en la línea correspondiente al instante $\mathbf{I}_{23}$.

Las instrucciones contenidas en la Tabla **T1** constituyen un algoritmo porque permiten computar **x + 1** para cualquier valor que tome **x** dentro del conjunto **N**, esto quiere decir que para cada valor de **x**, el proceso establecido por la tabla **T1** genera una Tm que llega a la situación de parada. Si consideramos a la situación del instante $\mathbf{I}_{23}$, $\mathbf{B11B111^0}$, como una palabra **w** en un lenguaje formal, podemos decir que el proceso establecido por la tabla **T1** es recursivo porque es un algoritmo que para toda palabra **w** decide si ha sido o no generada por la situación correspondiente a $\mathbf{I}_0$.

Lo anterior implica que una Tm puede computar funciones más complejas como las correspondientes a la suma, multiplicación y potenciación de la aritmética, por citar algunos ejemplos. El requisito es que estas funciones sean definidas recursivamente de tal manera que las operaciones más complejas sean reducidas a las más simples. Esto se logra a través de las tres definiciones siguientes:

$$x + 0 = x \qquad x \,.\, 0 = 0 \qquad x^0 = 1$$

$$x + y = (x + y)' \qquad x.\, y' = x.\, y + x \qquad x^{y'} = x^y.\, x$$

Tabla T2

Tabla de actos de Tm* para computar f (x), para x = 1

Instantes	Situación de Tm* (Tm* vs cinta)						
I_0	B	1	1^{1}	B	B	B	B
I_1	B	1	1	B^{2}	B	B	B
I_2	B	1	1	B	B^{3}	B	B
I_3	B	1	1	B^{4}	1	B	B
I_4	B	1	1^{5}	B	1	B	B
I_5	B	1^{6}	1	B	1	B	B
I_6	B	1	1^{7}	B	1	B	B
I_7	B	1	B	B^{7}	1	B	B
I_8	B	1	B	B	1^{8}	B	B
I_9	B	1	B	B	1	B^{3}	B
I_{10}	B	1	B	B	1^{4}	1	B
I_{11}	B	1	B	B^{4}	1	1	B
I_{12}	B	1	B^{5}	B	1	1	B
I_{13}	B	1^{5}	B	B	1	1	B
I_{14}	B^{6}	1	B	B	1	1	B
I_{15}	B	1^{2}	B	B	1	1	B
I_{16}	B	1	B^{9}	B	1	1	B
I_{17}	B	1	1	B^{9}	1	1	B
I_{18}	B	1	1	1	1^{9}	1	B
I_{19}	B	1	1	1^{10}	1	1	B
I_{20}	B	1	1	B	1^{11}	1	B
I_{21}	B	1	1	B	1	1^{11}	B
I_{22}	B	1	1	B	1	1	B^{11}
I_{23}	B	1	1	B	1	1	1^{0}
I_{24}	B	1	1	B	1	1	1^{0}

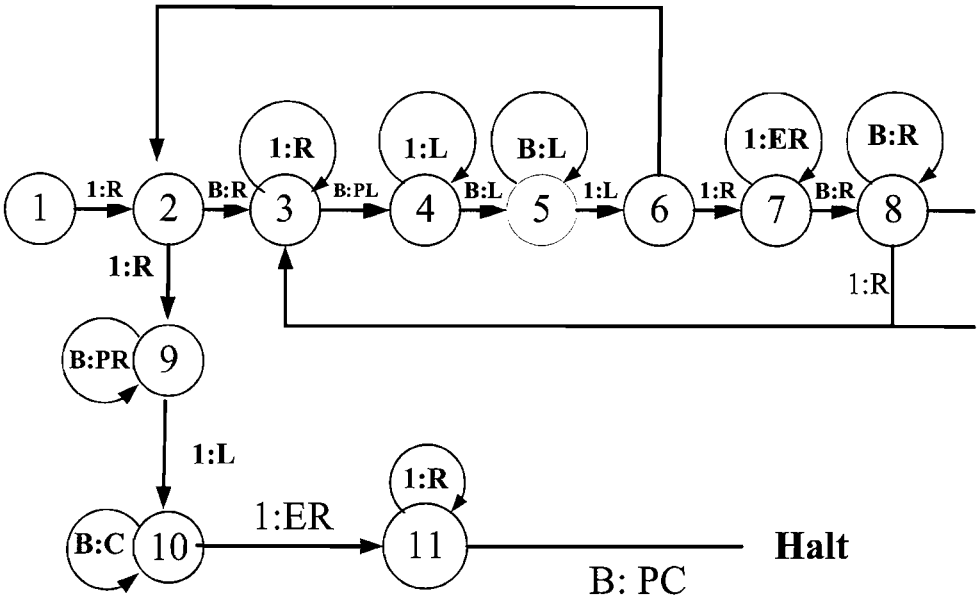


Diagrama D1

De este modo la potenciación se reduce al producto y el producto a la suma, la misma que se reduce, exceptuando el caso de la identidad, al cómputo de **x + 1**, vale decir al cómputo de la función sucesor, lo que realiza el algoritmo de la tabla **T1**. Por consiguiente, la tabla **T1** permite que una Tm compute cualquier función reducible a la función sucesor, lo cual la hace especialmente potente para los usos normales de la matemática aplicada.

El investigador Alonso Church propuso, en 1936, una tesis conocida como la conjetura de Church, la cual que afirma que toda función, que es intuitivamente computable, es también efectivamente computable a través de funciones recursivas generales y, un año más tarde, Turing demostró que para toda función recursiva general existe una Tm capaz de computarla. De este modo, la conjetura de que toda función intuitivamente computable es recursivamente computable se ha convertido en la conjetura Church-Turing, la misma que no tiene contraejemplo conocido, pues no se sabe de una función computable que no lo sea también por alguna Tm o por funciones recursivas generales, llamadas funciones *lambda*. Posteriormente, y desde otra perspectiva centrada en el análisis de sucesiones de símbolos de un alfabeto dado, Marcov (1951) formuló una teoría de algoritmos con resultados equivalentes a los de Church y Turing. Por añadidura, se ha demostrado que cualquier computación que pueda ser ejecutada por una computadora digital moderna puede ser descrita por medio de una Tm (Vid. Hopcroft & Ullman, 1969, p.80).

Lo anterior explica el mecanismo a través del cual el hombre ha podido transferir a la máquina tareas que se estiman correspondientes a funciones superiores, tal es el caso de los cálculos numéricos. Esto ha posibilitado que también se deriven al computador tareas de dirección y ha dado lugar a que se formule la metáfora del paralelismo funcional entre el cerebro humano y una Tm, que es el artificio que más directamente ofrece analogía con el cálculo humano, materializado en una tarea que puede ser descompuesta en sus elementos más simples, de tal manera que se puede generar una lista enumerable y exhaustiva de un proceso, como el descrito por la tabla **T2.**

Limitaciones de la máquina de Turing

La Tm está sujeta al menos a dos limitaciones, muy relacionadas entre sí pero distinguibles. La primera se refiere directamente a la posibilidad de construir al menos una función numérica **Ψ (x)** no computable por una Tm-universal (Tm-U) que sí es capaz de computar cualquier función φ(x), para la que existe un número **r** finito de instantes, lo que equivale a decir que en el instante $\mathbf{I}_r$ la Tm-U hace alto o tiene el problema del halting resuelto (una Tm universal es una máquina capaz de simular la conducta de cualquier Tm). La otra limitación es conocida como el problema del «castor laborioso» (*busy beaver*) y se refiere a la productividad de la Tm medida en términos de la mayor o menor longitud de los segmentos de 'unos' que puede imprimir sobre una cinta que en el instante $\mathbf{I}_0$ está en blanco. El problema del castor laborioso de clase (**n,2**) puede formularse, para la Tm que hemos descrito, en los términos siguientes: para Tms (máquinas de Turing) de **n** estados, 2 símbolos, **B, l,** y 2 movimientos, **R, L**, el número **N** de Tms posibles se define **N** = $(4(n+1))2^n$. La pregunta es ¿cuál de estas **N** máquinas de Turing posibles hará alto con más 'unos' escritos sobre la cinta?

La respuesta a estos problemas requiere un esclarecimiento previo de la naturaleza de los mismos. En la medida que ambas limitaciones se reducen a un interrogante acerca de la computabilidad de una función pueden ser expresadas a través de la pregunta:

¿Existe una Tm-U capaz de computar la función **G(x)**? Responder **Sí** significa que existe un algoritmo para el cómputo de **G(x).** Responder **No** admite dos interpretaciones. La primera es que se puede demostrar que no existe algoritmo capaz de computar **G(x)**, lo que implica la insolubilidad de la computabilidad de **G(x)** por una Tm-U pero no la insolubilidad del problema planteado, pues este ha quedado cerrado en tanto se ha demostrado la corrección de la respuesta negativa. La segunda posibilidad es que la respuesta **No** haga referencia a que no se conoce si existe o no un algoritmo para la computabilidad de **G(x).** En este caso el problema queda abierto y la investigación científica tiene un reto más que afrontar.

Las limitaciones antes referidas tienen respuesta negativa en el sentido de la primera interpretación. Vale decir, pueden considerarse problemas cerrados, lo que no impide que el análisis de los mecanismos implicados sea productivo desde el punto de vista epistemológico.

Para explicar los lineamientos intuitivos de la primera limitación procederemos a construir el índice de la Tm* de la tabla **T1.** Para el efecto, formularemos primero su ***código*** escribiendo horizontalmente y de manera sucesiva las instrucciones que constituyen la Tm*, anteponiendo a cada una de ellas la condición de la celda escrutada, esto es, uno de los símbolos B,1.

c) BCO, 1R2; BR3, lR9;..... ; BPCO, 1R11

Para construir este código de la Tm* hemos usado 16 símbolos incluyendo los puntos y comas, y las comas que hemos introducido para separar las instrucciones y sus componentes. Estos 16 símbolos son **C L R , ; B O l 2 3 4 5 6 7 8 9.**

Si interpretamos el código **c** como un número escrito en un sistema en base 16, obtendremos un entero positivo, bastante grande, que es el índice de muestra Tm*. De la misma manera para toda Tm se puede obtener un índice **i** que la describe y establece su patrón de conducta.

Si llamamos **a** al índice de una Tm-U, asumimos que existe una función $\varphi_i(x)$ computable por una Tm-U con índice **i** y definimos la función Ψ **(a)** como sigue:

$$\Psi(a) = \begin{cases} \varphi_a(a) + 1 \text{ si } \varphi_a(a) \text{ es computable} \\ 0 \text{ en otro caso} \end{cases}$$

se puede demostrar por reducción al absurdo que Ψ **(a)** no es computable por Tm-U. En efecto si Ψ **(a)** fuera computable, la Tm-U simularía una máquina con índice **p** que denotamos Tm_p, la misma que computaría , φ **(a)** para **i=p** y para cualquier valor de **a**. Por tanto, tendríamos $\Psi(a) = \varphi_p(a)$ y $\Psi(p) = \varphi_p(p)$, pero como hemos asumido, $\varphi_i(x)$ es computable, entonces $\varphi_p(p)$, también lo es, lo que aplicando la definición dada establece $\Psi(p) = \varphi(p) + 1$, resultado que contradice la igualdad anterior. Esto significa, intuitivamente, que no existe una Tm que sea capaz de computar una función, $\varphi_i(x)$ que toma el valor $x = i$, esto es, ninguna Tm puede computar su propio índice o, en otras palabras, la computabilidad del índice de cualquier Tm por ella misma es insoluble.

En relación con el problema del castor laborioso, el problema se reduce a demostrar que no existe una Tm capaz de computar la función **p**, definida para una Tm de **n** estados así:

p(n) = la productividad de las Tms de **n** estados más productivos.

Este problema fue resuelto por Tibor Rado (1962) quien demostró, por reducción al absurdo, que si existiera tal Tm, a la cual podemos llamar **BB**, tal máquina computaría la desigualdad $p(n+2k) > p(p(n))$, probado que existen como resultados previos $p(n+1) > p(n)$ y $p(n+11) > 2n$. Esto conduce, omitiendo detalles, a la contradicción $0 \geq 1$, lo que significa que la **BB** no existe.

Un problema adicional, muy ligado al anterior, es el del *halting* que puede ser formulado en términos de una proposición que afirma que no existe algoritmo alguno que nos permita reconocer cuáles son las Tms que se mueven indefinidamente y que, consecuentemente, tienen una productividad igual a cero. Si se asume como primera premisa el resultado de una demostración condicional que establece: Si el problema del *halting* fuera soluble entonces la función p sería soluble por medios intuitivos. Y si añadimos como segunda premisa la conjetura de Church, la misma que para éste caso concreto asume la forma: Si **p** es computable por medios intuitivos, entonces existe una Tm que compute **p**. En consecuencia, utilizando

el resultado de Tibor Rado que prueba que no existe Tm alguna que compute **p**, podemos deducir de manera lógicamente inobjetable que el problema del *halting* no es soluble.

La forma de nuestro razonamiento es:

$$((H \rightarrow C) \& (C \rightarrow T) \& (\sim T)) \rightarrow \sim H$$

donde **'H'** es la proposición "El problema del halting es soluble» y el componente **'C → T** es la conjetura de Church.

Implicaciones epistemológicas

En la medida que una Tm es un artificio matemático, sus limitaciones son teóricas o de principio y, en consecuencia, ellas no pueden ser superadas en sus aplicaciones prácticas, pues tienen una naturaleza más restrictiva que la imposibilidad física de construir una máquina de movimiento perpetuo. El origen de estas limitaciones radica en las características de los lenguajes que reconoce y acepta. Así el problema del *halting* puede ser reformulado en los siguientes términos: dada una Tm arbitraria y una situación inicial con un segmento arbitrario, eventualmente vacío, de unos impresos en la cinta, no existe algoritmo alguno que permita decidir si la Tm hará alto o no. Desde otro ángulo, este mismo problema se reduce a probar que la suposición de que existe una Tm- U que permite decidir si cualquier Tm arbitraria hace alto o no, conduce a una contradicción, la misma que consiste en afirmar y negar que dicha Tm acepta un determinado lenguaje **L**.

El hecho de que un lenguaje que acepta una Tm deba ser recursivo, obliga a que ella solo pueda ser usada como modelo de procesos enumerables y finitos, sin embargo, la teoría general de la Tm, que permite describirla y demostrar sus alcances y limitaciones, presupone la existencia y utilización de conjuntos no enumerables de cardinalidad $2^{\aleph_0}$, esto es, la Tm es recursiva pero la teoría de la Tm, que es uno de los productos notables del pensamiento humano, no lo es.

Así, por ejemplo, la teoría de la Tm explica por qué existen funciones no computables a partir del hecho de que el conjunto de las funciones numéricas recursivas es infinito y enumerable, en cambio, el conjunto de todas las funciones numéricas posibles es infinito pero no es enumerable, porque no lo es el conjunto potencia del conjunto de los enteros positivos, como lo demostró Cantor, probando que intentar confeccionar una lista exhaustiva de los elementos de un conjunto de cardinalidad $2^{\aleph_0}$ conduce a contradicción.

Por tanto, la tesis del paralelismo funcional entre el cerebro y un ordenador de propósito general, representado por una Tm, en el mejor de los casos, podría explicar el modo recursivo de pensar pero deja sin explicación el pensamiento que se expresa a través de conceptos no recursivos, como el de número transfinito, y conceptos elementales y de implicancias generalizadas, como el de no enumerabilidad. Dicha tesis no sólo implica atribuir a la Tm una generalidad que no tiene, sino también conlleva una comprensión inadecuada del pensamiento expresado en todas las teorías conocidas como indecidibles, tal es el caso de la lógica de predicados de primer orden o de la teoría formal de números, para las cuales no

existe algoritmo alguno que permita decidir cuándo una fórmula arbitraria es un teorema y cuándo no lo es, como lo demostró A. Church (1936) en términos de la definibilidad de funciones *lambda*.

Estos resultados son equivalentes a afirmar que la ausencia de un procedimiento de decisión para el conjunto de los teoremas de los sistemas mencionados consiste en la inexistencia de Tm alguna capaz de computar dicho conjunto.

Lo anterior significa que cualquier modelación o simulación de los procesos mentales debe distinguir claramente entre lo inteligible o comprensible y lo recursivamente computable. Como señalamos en la parte inicial de este artículo: ***Todo lo recursivamente computable es inteligible, pero no todo lo inteligible es recursivamente computable.*** La sucesión de los números cantorianos $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$,...es inteligible, pero ninguno de ellos es obtenible por métodos recursivos. Inclusive, si nos atenemos a los métodos recursivos o a las Tms, en muchos casos tenemos que conformamos con lo inteligible y no con lo efectivamente computable en términos del valor preciso de una función con valores finitos pero muy grandes. Si consideramos el conjunto de las Tms de 100 estados, existe $163,216^{100}$ de ellas. Examinando este conjunto se sabe que una de ellas hará alto con (((7!)!)!)! 'unos' en la cinta, que es una cifra fácil de entender pero prácticamente indeterminable, aun imprimiendo mil millones de 'unos' por segundo durante diez mil millones de años (Korfhage, 1970). Consecuentemente, la Tm capaz de computar (((7!)!)!)! es inteligible pero no, al menos por ahora, construible. Empero, también es inteligible que (((7!)!)!)! es muy grande pero finito, y que en relación con $\aleph_0$ es pequeño.

Consecuentemente, los psicólogos cognitivistas, que investigan en el sentido de construir teorías que expliquen el pensamiento humano y que invocan como modelo de simulación la Tm, tendrían que tomar en consideración el hecho científicamente establecido que el ámbito de lo inteligible es inmensamente más amplio y rico que el de lo computable. Podría ocurrir que nuestro nivel de desarrollo teórico y tecnológico no nos permita por ahora mejor simulador de la función pensante que una Tm, pero en todo caso, se deberá ser explícitamente consciente de que se está simulando solo una parte del conjunto de lo inteligible, el mismo que tiene entre sus elementos las teorías más elaboradas que ha producido la actividad superior conocida como pensamiento, que excede largamente, como hemos demostrado, el ámbito de lo efectivamente computable.

Bibliografía

Andur Pedersen, Stig — *Mathematical Models in Cognitive Science.* Abstracs del CLFMC-87, Tomo 2, Moscú, pp. 404-405.

Boole, George y Richard Jeffrey — (1974) *Computability and Logic.* Cambridge University Press.

Bunge, Mario — *The place of Psychology in the System of Knowledge.* Abstracts del CLFMC-87, Tomo 2, Moscú, pp. 369-71.

Burgin, M.S. — *The notion of Algorithm and the Turing-Church Thesis.* Moscú. Abstracts del CLFMC-87, Tomo 5, Parte 1, pp. 138-140.

Cohen, Jonathan — *A note in the Evolutionary Theory of Software Development.* Moscú. Abstracts del CLFMC-87, Tomo 2, pp. 489-490.

Dadong, Liang — *The Relationship between Human Thought and Artificial Intelligence.* Moscú. Abstraes del CLFMC-87, pp. 149-52.

Delclaux, Isidoro y Julio Seoane — (1982) *Psicología cognitiva y procesamiento de información.* Madrid, Ediciones Pirámide.

Gurevich, Yuri — *Logic and the Challenge of Computer Science.* Moscú. Abstracts del CLFMC-87, Tomo 5, Parte 1, pp. 144-146.

Hopcroft, John y Ullman, Jeffrey — (1969) *Formal Languages and Their relation to Automata.* Addison Wesley Publishing Company, Series in Computer Science and Information Processing.

Humphries, Jill — *Artificial Intelligence and Human Mental States.* Abstracst del CLFMC-87, Tomo 2, Moscú, pp.378-380.

Johnson, Mark — *Grammar as Logic, Parsing and Deduction 1987.* Abstracs del VIII Congreso Internacional de Lógica, Filosofía y Metodología de la Ciencia (CLFMC-87), Tomo 1, Moscú. pp. 468-470.

Kleene, Stepehn — (1967) *Mathematical Logic.* John Wiley and Sons, Inc.

Korfhage, Robert — (1970) *Lógica y Algoritmos.* México D.F., Editorial Limusa Wiley.

Krishnamurthy, E.V. — Non-Archimendian Valuation-Its Philosophy and practical utility for rational recursive computacion. Moscú. Abstracts del CLFMC-87, Tomo 1, pp.143-145.

Kushner, B.A. *A Counter Example in the Theory of Constructive Functions.* Moscú. Abstracts del CLFMC-87 pp. 147-148.

Latil, Pierre de (1958) *El pensamiento artificial.* Buenos Aires, Editorial Losada.

Lucchesi, Claudio, Simon, I. et al. (1979) *Aspectos teóricos da computacáo.* Río de Janeiro. Instituto de Matemática Pura y Aplicada.

Marras, Ausonio *Mental Images and the Frame Problem in Artificial Intelligence.* Abstracts del CLFMC-87, Tomo 2. Moscú, pp.400-403.

Seiffert, Helmut (1991) *Einfuhrung in die Wissenschaftstheorie.* München, Verlag C.H. Beck, n. Auflage.

Seiffert, Helmut y Gerard Radnitzky (1992) *Handlexikon zur Wissenschaftstheorie.* München, Deutscher Taschenbuch Verlag GmbH & Co. KG, 1992.

Striebing, Lothar *Computerisierung-Eine Herausforderung für die Gesellschaftsphilosophie.* Abstracts del CLFMC87. Tomo 2, Moscú, pp. 544-546.

Swift, Clare Logical *Inconsistencies in Mathematical Models of Neural Systems.* Abstracts del CLFMC-87, Tomo 2, Moscú, pp.417-420.

Wall, Robert (1972) *Introduction to Mathematical Linguistics.* PrenticeHall, Inc.

Zlatoustova, Egorov, Raskin Some Restrictions of Machine Modelling of Human Communication, Language and Thought. Abstracts del CLFMC-87. Tomo 1, Moscú, pp. 547-550.

Inteligencia artificial y derecho [110]

Nuestras tesis

En la presente exposición se formulan y defienden algunas conjeturas filosóficas en relación con los fundamentos teóricos de las investigaciones que se realizan en el ámbito de la Inteligencia artificial. De esta manera, nos proponemos contribuir al esclarecimiento de los alcances y limitaciones de tales investigaciones que incluyen un sector importante de trabajos y proyectos de especial interés jurídico. Al respecto, son relevantes los logros alcanzados en la construcción de sistemas expertos (SE) diseñados para satisfacer la necesidad de dotar de confiabilidad, rapidez y bajo costo a los actos jurídicos propios del derecho procesal.

En la medida que la filosofía adecuadamente ejercitada ha aportado, en lo sustancial, elucidaciones, pensamos que las tesis que pretendemos probar en este artículo son relevantes para cualquier actividad humana que recurra a métodos y planteamientos operacionales que presuponga la Teoría de Autómata, como es el caso de lo que se conoce como Informática jurídica o Jurimetría. Por tanto centraremos nuestra argumentación en la tarea de dar fundamento plausible a las siguientes tesis:

T_1. Las investigaciones contemporáneas tipificadas como de inteligencia artificial son en lo fundamental estudios referentes a la simulación de la conducta inteligente pero no de la inteligencia entendida como un conjunto de procesos mentales. Esta simulación se efectúa a través de programas ejecutables por un ordenador sujeto a las limitaciones y alcances de una máquina de Turing (Tm). Consecuentemente, la expresión 'Inteligencia artificial' tiene una fuerte dosis de metáfora, pues reduce la inteligencia a la conducta inteligente capaz de resolver problemas definibles en términos del cálculo de funciones recursivas.

T_2. Existe diferencia sustantiva entre simular un proceso y duplicar un proceso.

T_3. Es completamente factible simular la conducta inteligente sin por ello ser un simulador inteligente dotado de comprensión e intencionalidad, con el único requisito de ser capaz de aprobar lo que puede denominarse un test de Turing.

Desarrollaremos nuestra argumentación sustentatoria de las tesis anteriores en el mismo orden en el que ellas han sido expuestas y para el efecto recurriremos a la información histórica.

110 Conferencia inaugural del «Primer Congreso Nacional de Derecho e Informática». Organizado por la Facultad de Derecho de la UNMSM. Lima, octubre de 1995.

El surgimiento de la inteligencia artificial como ámbito de investigación

Podemos considerar que las investigaciones actuales en inteligencia artificial logran su motivación más sólida alrededor del año 1935 con los trabajos en lógica matemática de A. Church, S. Kleene y A. Turing, todos ellos realizados dentro del campo de las teorías lógicas de primer orden y de la teoría de números expresada por el modelo de Peano. De esta manera se instauró la teoría lógica de algoritmos que precisó las condiciones bajo las cuales era posible generar instrucciones para la ejecución automática, teóricamente infalible, de un cálculo. Los resultados de Church y Turing, que fueron obtenidos a través de metodologías distintas, resultaron equivalentes pero los del segundo se encuentran más divulgados a través del teorema conocido como máquina de Turing (Tm).

El salto del ámbito de la lógica al del ordenador fue inmediato. Si la existencia de un algoritmo garantizaba que una persona podía manipular mecánicamente un conjunto de signos físicos, haciendo abstracción total del significado que estos pudieran tener, entonces por qué no pensar que en esta tarea el hombre podía ser reemplazado por un ordenador que, por añadidura, no se aburre ni se cansa. De este modo se podrían lograr resultados, al menos con la misma eficiencia, siempre que el problema en cuestión sea susceptible de tratamiento algorítmico. Y ocurría que problemas de esta naturaleza son, por ejemplo, la resolución de cálculos aritméticos, la determinación de las raíces de una ecuación de segundo grado o la decisión de si un silogismo aristotélico es lógicamente válido o no. Consecuentemente, en tanto que siempre se ha pensado que el tratamiento de ellos requiere procesos mentales inteligentes, cualquier artificio capaz de ejecutarlos podía ser calificado de inteligente. Desde esta perspectiva era irrelevante el hecho de que un ordenador no sea de carne y hueso y posea una estructura material muy diferente a la del cuerpo humano. Lo que contaba era que los resultados, finalmente, eran los mismos.

Dentro de esta línea de investigación, A. Turing en su artículo «*Computing Machinery and Intelligence*» (1950, Revista *Mind*, vol. LIX, N.º 236) se propuso responder a la pregunta ¿pueden pensar las máquinas?y para hacerlo recurrió directamente a la estrategia de traducir la pregunta a la cuestión de si una máquina sería o no capaz de imitar o simular la conducta de un ser inteligente que participa en un juego que él llamó «de imitación». La tesis de Turing fue: si una máquina es capaz de imitar a una persona en el juego de la imitación de tal manera que no nos demos cuenta de la suplantación, entonces la máquina piensa en el mismo sentido en que lo hacen los humanos que participan en dicho juego. De esta manera se abrió paso, a partir de la investigación en algoritmos, a la investigación sobre la simulación de la conducta y, en general, de las actividades mentales. Se institucionalizó el modelo de «caja negra» y el concepto de sistema dinámico, lo que significó poner fundamentalmente énfasis en el comportamiento de las entidades y no en su naturaleza material o psicológica. Paralelamente, la psicología conductista se fortaleció gracias a los trabajos de Skinner y el concepto de mente fue responsabilizado de los desvíos metafísicos de las ciencias de la conducta.

Posteriormente, A. Newell se embarca en su proyecto conocido como (GPS) *General Problem Solver* y se propone la construcción de programas que posibiliten la imitación del jugador de ajedrez, del calculista de identidades trigonométricas y del lógico que demuestra teoremas de lógica proposicional de *Principia Mathematica* de Russell y Whitehead. Sin

embargo, el propósito de Newell no fue la mera simulación de la conducta inteligente sino del pensamiento o actividad mental, esfuerzo en el que contó con la colaboración de H. Simon, con quien publicó su artículo "GPS A Program that simulates Human Thought" (1963) en: E. Feigenbaum y Feldman, eds. *Computers and Thought. N.Y.* McGraw Hill). Debido a ello no siguió el camino algorítmico de sus antecesores sino que pretendió formular un programa heurístico que simulara los ensayos y errores de la mente humana en sus procesos reales. Por ello se aproximó a lo que se conoce como máquina de von Neumann, que es un teorema matemático cuya demostración presupone la hipótesis que afirma que la máquina puede equivocarse y minimizar sus errores. Estos esfuerzos sugirieron la idea de lo que se ha llamado psicología computacional, en el sentido de que se postula que si la máquina puede simular estados mentales, entonces a través de ella podemos conocer en profundidad la mente humana. Este programa ha devenido en una vertiente del cognitivismo actual que tiene un lugar muy importante en la investigación psicológica de las funciones superiores.

Casi paralelamente y sin las pretensiones explícitas de Newell y Simon, un lógico chino, Hao Wang, siguiendo el camino algorítmico, tuvo éxito en simular la conducta inteligente al construir un programa más potente que el GPS, el mismo que le permitió demostrar en 3 minutos 220 teoremas de lógica proposicional de *Principia Mathematica*, en lugar de los 38 que podía probar Newell. De esta manera los procedimientos reducibles a una máquina de Turing resultaron ser más potentes que los supuestamente heurísticos de Newell.

De otro lado, Warren McCulloch y Walter Pitts del Instituto Tecnológico de Massachusetts publicaron su artículo *A Logical Calculus of the Ideas Inmanent in Nervous Activity* (1965 en McCulloch, *Embodyments of Mind.* MIT Press) en el que proponen un modelo de simulación para las redes neuronales, usando las teorías neurológicas de Ramón y Cajal, los lenguajes lógicos de Rudolf Carnap y la teoría de circuitos lógicos creada por Shannon alrededor de 1930. Cabe señalar que este trabajo no está destinado a la simulación de la conducta inteligente sino del comportamiento neuronal, lo que correspondería más al «*hardware*» humano, a diferencia de Simon y Newell que estuvieron principalmente interesados en crear programas (software) que simulen los procesos mentales.

Los resultados descritos condujeron a investigadores como Marvin Minsky al convencimiento de que existe una disciplina general que puede denominarse Inteligencia Artificial (IA), la misma que podría constituir una teoría general de la inteligencia dentro de la cual los estudios referentes a la inteligencia humana sean solo un caso particular, pues admitiendo que las máquinas pueden pensar, al menos en el sentido definido por Turing, entonces hay más entidades inteligentes conocidas que miembros de la especie humana. A su vez J. McCarthy y R. Schank sostuvieron que si el ordenador era capaz de simular la conducta inteligente de, por ejemplo, leer historias y responder preguntas sobre ellas, entonces no hay motivo razonable para no atribuirle cualidades psicológicas como la comprensión y, de esta suerte, parecía tener sentido hablar de una psicología de la máquina (Vid Mc Carthy, Ascribing Mental Qualities to Machines, 1979 y Schanks, Scrips, Plans, Goals and Understanding, 1977).

El filósofo John Searle, analizando estos planteamientos, ha interpretado que la tesis fuerte de los teóricos de la IA consiste en establecer una analogía entre el hombre y la máquina que afirma que el software es al hardware como la mente es al cerebro. De esta analogía se

habría derivado la interpretación que sostiene que así como es posible tratar los problemas de software con independencia de los de hardware, así también se podría simular y examinar los problemas mentales sin considerar al cerebro, posibilidad que entusiasmó mucho a los psicólogos cognitivistas en la década de los setenta pero que hoy se encuentra fuertemente debilitada por los avances de la neurología y de la bioquímica cerebral, los mismos que permiten establecer conexiones causales entre determinados estados cerebrales y ciertos procesos mentales.

La inteligencia artificial y los sistemas expertos

Sin embargo, restituyendo la investigación en IA a sus cauces iniciales fijados por Turing mediante el juego de la imitación, los esfuerzos por simular la conducta inteligente han tenido notable éxito práctico y económico, como lo muestra la intensificación de la investigación en sistemas expertos (SE). Un SE es un programa, ejecutable por un ordenador, que simula la conducta de un experto humano que efectua un conjunto de tareas cuya realización, se supone, requiere inteligencia. La viabilidad de un SE es completa con la condición de que exista el *hardware* adecuado, se haya almacenado todos los conocimientos relevantes del experto mediante una representación ajustada a la máquina y se haya diseñado el programa que simule el razonamiento que realiza el experto para llegar a una conclusión y tomar una decisión.

La representación del conocimiento se logra a través de la traducción de los conocimientos del experto a un lenguaje de autómata que puede ser el LISP o el PROLOG. La simulación del razonamiento se consigue a través de un conjunto de reglas de inferencia (motor de inferencia) que permite encadenamientos de premisas a conclusión (*forward chaining*) y de conclusión a premisas (*backward chaining*). Todo este trabajo, que es fundamentalmente de programación, lo cumple un presunto nuevo especialista denominado ingeniero del conocimiento.

En el campo del derecho procesal existe un conjunto de secuencias de actos rutinarios a los que está sometido obligatoriamente un expediente por imperio de la ley. La preocupación central de la informática jurídica parece haber sido la construcción de sistemas expertos para automatizar todo aquello que se reduce a una rutina repetitiva. Así como los bancos se han beneficiado notablemente con el SE llamado cajero automático, que no tiene horario, no se cansa, no comete errores por aburrimiento, carece de sueldo y, lo más importante desde la perspectiva del lucro, carece de derechos sociales y de sindicato, muchos especialistas han pensado que la construcción de sistemas expertos jurídicos puede ser de notable beneficio no solo desde el punto de vista económico sino también considerando la posibilidad de una administración más lograda de la justicia. En efecto, el SE no se emociona, no tiene animadversiones, es muy expeditivo y puede ser programado para que sea un eficiente secretario que no reciba ni pida comisiones. Ello explica que en los países desarrollados exista una multitud de sistemas expertos jurídicos y que su enumeración sea, simplemente, imposible. A manera de ejemplos mencionaremos los sistemas expertos ingleses LDS & SAL para las reclamaciones por daños y perjuicios, TAXMAN y TAXADVISOR para el pago de impuestos y OXFORD para trámites de divorcio en Escocia. En España funciona, entre muchos, el proyecto SEDE en el ámbito de los procesos de contratación y en Italia el proyecto LEXIS para trámites de matrimonio y divorcio.

Las limitaciones de la simulación

El recuento histórico apretado que hemos realizado es suficiente para mostrar que las investigaciones exitosas de IA en el campo de los sistemas expertos son básicamente trabajos de simulación de conductas inteligentes, en el sentido de que no pueden ser ejecutadas, por ejemplo, por animales. Sin embargo, hay una característica común a todas las conductas susceptibles de simulación por un SE. Ella es que en todos los casos se trata de conductas rutinarias, repetitivas y monótonas que son muy sencillas de comprender pero tediosas en su realización. Ello hace comprensible que dentro del ámbito jurídico sea el campo del derecho procesal el que más ha llamado la atención de los constructores de SEs. En efecto, el ordenador nos lleva mucha ventaja en el cumplimiento de tareas cuya realización requiere muy poca comprensión pero cantidades ingentes de energía y tiempo.

Lo anterior no es casual sino causal. Un análisis de la teoría de algoritmos expresada a través de una máquina de Turing permite deducir claramente que las únicas conductas que pueden ser simuladas son aquellas que son claramente rutinarias o aquellas que sin parecer rutinarias son reducibles a una lista de rutinas, la misma que puede ser, eventualmente, muy larga como en el caso del ajedrez. Solo para los procesos de esta naturaleza existe o es posible un algoritmo que en un conjunto finito de pasos permite dar respuesta a un problema con un 'si' o un 'no'. Esto ha sido demostrado por los teoremas, vigentes a la fecha, de Church, sobre funciones recursivas, y de Turing, para una Tm que tiene el problema del *halting* resuelto, esto es, que se detiene o hace alto para entregar un resultado. Asimismo, está suficientemente demostrado que cualquier máquina heurística, como la de Von Neumann, si es efectiva, puede ser reemplazada por una Tm y, también, que cualquier ordenador de los conocidos cumple funciones reducibles a las de una Tm. Todo ello nos permite afirmar que, a la luz de la investigación actual en teoría de autómata, no existe por ahora mejor simulador de la conducta inteligente que una Tm.

Argumentos en pro de la tesis *T1*

Empero, lo dicho entraña una fuerte limitación a las pretensiones de la IA fuerte para simular la conducta inteligente. La información admisible por un Tm es aquella que está formulada en funciones recursivas. Llamaremos, en breve, información recursiva a la de este tipo y precisaremos que por ahora ella es la única susceptible de un tratamiento algorítmico que garantice una respuesta en términos de 'si' o de 'no' a un problema propuesto. Pero ¿tenemos alguna razón para suponer que toda información procesable por el cerebro humano es necesariamente recursiva o es que hay una diferencia sustantiva entre describir conductas y describir operaciones mentales? Ciertamente, no hay razón para pensar que toda la información procesable por la mente humana es recursiva y, en lugar de ello, hay buenas razones en contrario. Por ejemplo, la noción de conjunto infinito, indispensable para el desarrollo de la matemática, no es recursiva. Tampoco lo es la noción de número cantoriano transfinito. Sin embargo, son nociones inteligibles o comprensibles aunque no computables por un ordenador que no admitiría, por ejemplo, que todo conjunto infinito tiene al menos un subconjunto propio equipotente con él, lo que en algún sentido vulnera el principio tradicional de que el todo es mayor que la parte. Por tanto, la existencia de información no-recursiva en la mente es un argumento fuerte para afirmar que un computador que ejecuta un programa de SE no simula procesos mentales o razonamientos sino solamente conductas llamadas inteligentes.

Los procesos mentales no-recursivos son, en principio, no simulables por Tm alguna y, consecuentemente, por ordenador digital alguno. La situación es más drástica para la simulación de la actividad mental si consideramos que el cerebro también procesa información emotiva y volitiva cuya naturaleza no hay razón para pensar que sea recursiva. Por añadidura, solo las teorías lógicas y matemáticas más elementales son susceptibles de tratamiento a través de algoritmos. Es el caso del álgebra de Boole, que es una estructura algebraica algoritmizable (decidible) pero teóricamente sencilla y de gran practicidad por su aplicación al diseño de circuitos para ordenadores digitales. Empero, las teorías lógicas de primer orden no son algoritmizables, ni la aritmética de Peano, ni ninguna teoría que la contenga. Ello significa que la mayoría de las teorías científicas importantes exceden las posibilidades de la algoritmización que hemos llamado test de Turing, el cual que establece que solamente es procesable de manera efectiva por un ordenador la información que es reducible a la función sucesor.

Argumentos en pro de la tesis *T2*

Enfatizar la diferencia entre simular un proceso y duplicar un proceso es un esfuerzo que no tendría propósito relevante en esta discusión, si es que algunas tesis como las de McCarthy y Schank no sugirieran que el hecho de que el ordenador puede simular conductas inteligentes, nos abre la posibilidad de afirmar que sus estados internos son muy semejantes a los de los humanos. En buena cuenta, la tesis que ellos defienden es: si los ordenadores se comportan inteligentemente, entonces comprenden y piensan como es propio de los seres inteligentes.

Sin embargo, como ha sido señalado por Searle, hay una diferencia grande entre simular un proceso y duplicarlo, y usualmente quienes trabajan con ordenadores lo entienden así. Por ejemplo, una cosa es simular una guerra en el computador y otra producirla. Esto es, el modelo de simulación no tiene por qué tener la misma naturaleza que lo simulado. Consecuentemente, no hay ninguna necesidad intrínseca de que el simulador de una conducta inteligente sea también inteligente.

Duplicar un proceso o un objeto no es simularlo sino producir otro objeto o proceso. Esto ocurre cuando producimos un conjunto de automóviles en serie o cuando aplicamos el mismo tratamiento a diferentes pacientes que tienen el mismo diagnóstico en un hospital. En estos casos cada nuevo automóvil y cada nuevo paciente sometido a tratamiento no es un ejemplo de simulación sino un nuevo objeto y un nuevo proceso que tiene la misma naturaleza que los anteriores. Por el contrario, carecería de sentido decir que una guerra simulada en el computador tiene la misma naturaleza que una guerra real. De la misma manera, carece de asidero razonable afirmar que el simulador de una conducta inteligente desarrollada por un ser humano, también tiene un psiquismo inteligente.

En el ámbito legal la diferencia entre simulación y duplicación parece clara y muy relevante. Por ejemplo, el Registro Electoral concede legalmente, a quienes lo solicitan, duplicados de su libreta electoral. Empero, las leyes peruanas persiguen a quienes simulan libretas electorales

Argumentos en pro de la tesis *T3*

En esta sección recurriremos al argumento de John Searle, conocido como el argumento de la «habitación china», debido a las grandes repercusiones que ha tenido en el ámbito de la

inteligencia artificial. Se parte de la hipótesis de que ser competente en un idioma, por ejemplo el chino, es una capacidad inteligente en la medida que requiere comprensión e intencionalidad utilizarlo. El objetivo de este argumento alegórico es probar que es completamente viable simular que se habla chino sin necesidad de comprender chino, esto es, sin ser realmente inteligente. Un tanto paradojalmente, Searle ha utilizado el ejemplo del juego de la imitación de Turing en un sentido contrario a su propósito inicial. En este caso se trata de probar que una máquina no es capaz de pensar sino sus programadores y constructores.

Supongamos que una persona **X**, hispanohablante, que no conoce en absoluto el idioma chino, es encerrada en una habitación y se le entrega en la forma de fichas, dos conjuntos de ideogramas chinos. Al primero lo denominaremos el conjunto A que tiene como elementos secuencias de ideogramas que representan preguntas en chino. Al segundo lo llamaremos conjunto **B** que tiene como elementos ideogramas que representan respuestas en chino a dichas preguntas. Supongamos, además, que una persona que conoce chino y habla español le enseña a **X**, en su lengua nativa, cuáles son las correspondencias que existen entre los ideogramas de los conjuntos **A** y **B**, de tal manera que a cada pregunta le corresponda una respuesta. Estas reglas de correspondencia las puede anotar **X** en un cuaderno y ellas constituyen una especie de programa de *matching* entre los elementos de **A** y **B**, el mismo que está escrito en español. Supongamos, ahora, que **X** se comunica con el exterior solamente por una ventana por la que puede recibir y hacer salir fichas que contienen ideogramas. Asimismo, supongamos también que en el exterior hay un conjunto de hablantes nativos de chino que pueden observar la entrada y salida de las fichas pero no al señor **X**, a quien no conocen en absoluto. Supongamos, una vez más, que uno de los hablantes de chino decide preguntarle a **X** si le gusta el arroz chaufa y para ello introduce la ficha con la pregunta correspondiente. Inmediatamente **X**, a gran velocidad, compara la ficha recibida con los elementos del conjunto **A**, identifica aquel que tiene iguales ideogramas, busca consultando con su cuaderno, el respectivo elemento de **B** y le entrega la ficha de respuesta, por la ventana, al chino que lo interrogó. Como asumimos que las reglas de correspondencia que le enseñaron a **X** son correctas, vale decir, su programa es correcto, entonces el chino que lo interrogó y todos los observadores encontrarán la respuesta correcta y podrán continuar el interrogatorio. El resultado esperable es que **X** continuará respondiendo correctamente lo que hará pensar al interrogador y a los observadores que dentro de la habitación hay un hablante de chino. De esta manera **X** habrá simulado que habla chino, comportándose como si comprendiera chino al entregar las fichas correctas, pero realmente él no sabrá en absoluto sobre qué ha respondido ni estará enterado de que contestó que no le gusta el arroz chaufa porque detesta la carne de cerdo. Y la razón es obvia, el señor X para responder ha tenido solamente reglas de correspondencia que sólo toman en cuenta la estructura física de los ideogramas sin que interese su significado. A través de este expediente el señor X habrá simulado la conducta inteligente que consiste en dar respuestas correctas en chino sin comprender en lo absoluto chino. Se trata de un experimento mental que pone en claro que se puede simular una conducta inteligente sin por ello ser inteligente en el sentido de comprender y ser capaz de emitir mensajes intencionados. *Mutatis mutandis*, el hecho de que una máquina adecuadamente programada responda preguntas en chino la hace buena simuladora de una conducta inteligente pero no, en sí misma, inteligente. Y, ciertamente, lo que hemos probado como válido para el ejemplo de la habitación china es aplicable a cualquier simulación por ordenador, lo que incluye a todos los sistemas expertos.

Los antecedentes más inmediatos en la investigación sobre Inteligencia Artificial (IA) pueden encontrarse en la formulación explícita del proyecto formalista, el mismo que influyó en las investigaciones en lógica matemática durante, aproximadamente, los primeros 35 años de nuestro siglo. Se propuso la construcción de un lenguaje completamente sintáctico para decidir la aceptabilidad o no de las proposiciones matemáticas considerando solo la estructura física de las secuencias de signos que les sirven como medios de expresión. Se trataba de construir un cálculo que tuviera las reglas adecuadas para transformar una secuencia admisible de signos físicos perteneciente a un lenguaje dado, eventualmente una secuencia de manchas de tinta, en otra secuencia de manchas de tinta igualmente admisible, por así decirlo. De esta manera podía discriminarse entre las secuencias de manchas de tinta obtenibles por aplicación a las reglas de transformación y las que no lo eran. Se pretendió que así se podría evitar el uso de conceptos semánticos en la lógica y en la matemática, los cuales por requerir la interpretación de significados daban paso a la equivocidad y al error. Sin embargo, como es conocido, los hechos fueron distintos. El segundo teorema de Gödel de 1931 y el teorema de Tarski de 1936, sobre el concepto de verdad en los lenguajes formalizados, probaron de manera concluyente que el concepto semántico de verdad no era eliminable de las teorías relevantes y pusieron punto final al sueño de David Hilbert,[111] el cual consistió en tratar de encontrar un mecanismo que permitiera reemplazar el concepto de proposición verdadera por el de proposición lógicamente deducida.

El proyecto formalista fracasó en sus aspiraciones máximas pero los esfuerzos por encontrar procedimientos mecánicos que transformaran la secuencia de manchas de tinta en otras dieron lugar a la teoría de algoritmos. El problema conocido como *Entscheidungs problem* fue materia de soluciones alternativas pero equivalentes por obra de A. Church, A. Turing, S. Kleene, alrededor de 1936, y de Markov en 1974. El planteamiento más operativo fue el Turing a través de su teorema conocido como máquina de Turing (TM) que presenta un artificio capaz de realizar de manera efectiva cualquier cómputo con la condición de que sea reducible a la escritura reiterada de dos manchas de tinta distintas, que pueden ser el 1 y el 0, las cuales pueden ser impresas, borradas o intercambiadas a voluntad sobre una cinta potencialmente infinita en sus extremos. La realización material de este diseño fue casi inmediata con la aplicación que hizo C. Shannon del cálculo proposicional al diseño lógico de redes eléctricas para computadoras digitales. Probablemente, con diferencias de tiempo muy ligeras, los primeros ordenadores electrónicos los construyeron el alemán Konrad Zuse (Z3, 1941), Shannon y Aiken (Mark I) y A. Turing (Madam en la Universidad de Manchester).[112]

111 En relación con las tesis formalistas puede leerse Hilbert (1904) *On the Foundations of Logic and Arithmetic*, publicado por van Heijenoort (1967) *From Frege to Gödel*, Harvard University Press.

112 La fecha de construcción del primer computador electrónico con diseño lógico parece discutible porque eran tiempos de guerra y esta información era considerada estratégica. Recientemente la revista *Letter*, (marzo, 1996) del Servicio Alemán de Intercambio Académico (DAAD) dio la noticia de la muerte de Zuse y proporcionó indicios de que su computador, Z3, habría sido el primero en funcionar.

Puede considerarse que el primer trabajo registrado con la intención explícita de simular la hipotética base neuronal de la inteligencia humana es el McCulloch y Pitts titulado: *A Logical Calculus of the Ideas Imanents in Nervous Activity* (1943). Así se inició la línea de investigación en IA orientada principalmente a la modelación del cerebro y que fue desarrollada por Rosenblatt en 1962 mediante el conocido *Perceptron*. Casi simultáneamente, A. Newell y H. Simon iniciaron las investigaciones de IA con el proyecto de construir programas que procesarían símbolos físicos bajo la hipótesis de que la mente humana es en lo fundamental un procesador de información. Su intención fue apartarse de los procedimientos algorítmicos y elaborar un software heurístico que simulara la búsqueda y la corrección de los errores, acogiendo ideas de Von Neumann. Esta línea de investigación ha sido continuada por J. McCarthy, M. Minsky y otros, entre los que se cuenta a Winograd y Schank, quienes han pretendido que tiene sentido afirmar que las computadoras comprenden, piensan y tienen estados psicológicos con independencia del material del que estén construidas.[113] Asimismo, la IA sería una teoría general del procesamiento de información que tendría como casos particulares al computador y al cerebro humano. Lo que llamamos mente o conciencia no serían sino ficciones adecuadas para referirnos a la capacidad cerebral de procesar información. La denominada autoconciencia tendría un símil muy adecuado en la simulación reflexiva que hacen las computadoras, como lo pretenden Dennett y Carley.[114] Por ejemplo, una computadora IBM puede simular a una Apple que está a su vez simulando a una IBM que simula una Apple, y así sucesivamente.

En las últimas dos décadas un importante sector de la investigación en IA se ha convertido en campo de la ingeniería a través del diseño de sistemas expertos que han tenido notable éxito desde la aparición de MYCIN en 1976 en la Universidad de Stanford. Los manuales de ingeniería definen a la IA como el estudio de las computaciones que permiten percibir, razonar y actuar (Winston, Patrick, *Inteligencia artificial*, Addison Wesley Lbr. 1994).

De otra parte, al final de la década de 1950, un grupo de psicólogos que consideró importante la investigación de los que se conoce como funciones superiores, encontró en los trabajos de Newell y Simon y en los de Chomsky en Lingüística una fuerte motivación para estudiar la capacidad cognoscitiva humana poniendo énfasis en el lenguaje. Resultaron particularmente esclarecedores los resultados de las investigaciones de Chomsky que proporcionaban argumentos fuertes para probar que la competencia lingüística no era explicable desde la perspectiva conductista y que cualquier lenguaje natural tiene una gramática más compleja que cualquier lenguaje de máquina. También contribuyeron a un cambio de orientación en la comprensión de las funciones mentales los estudios en neuropsicología de Donald Hebb y Hubel y de modelación del cerebro de R. Ashby. Así se configura la denominada revolución cognitiva por obra de Neisser, Miller y Brunner, entre otros. Aunque estos estudios tienen otra direccionalidad que los de IA, es importante señalar que en ellos ha jugado un rol importante lo que se ha expresado como metáfora del computador.

Pensamos, sin embargo, que, sin minimizar la productividad de las investigaciones en IA y de la revolución cognitiva, la literatura disponible sugiere logros importantes pero también un entusiasmo excesivo que lleva a sostener algunas tesis que parecen obviar importantes aspectos de la teoría de autómatas y a introducir un aparato conceptual que antropoformiza

113 Al respecto pude leerse Searle, John (1980) *Minds, Brains and Programs*, publicado en castellano en Boden Margaret (1944) *Filosofía de la inteligencia artificial*, Fondo de Cultura Económica, México: pp. 82-104.

114 Declaraciones de Dennett a la revista *Free Inquiry*, Vol. 15, Nro. 4, 1995, pp. 19-21.

descripciones que deberían formularse en términos de causalidad mecánica y en términos del manejo sintáctico de un sistema de signos. Esto no obsta que el desarrollo de los trabajos en IA puede sugerir imágenes que ayuden a una mejor conceptualización de las funciones mentales, pero ello no debe implicar en modo alguno un reduccionismo que ignore los niveles de autonomía de los sistemas y que convierta inadecuadamente las condiciones que solo son necesarias en condiciones, además, suficientes. Así, algunos de los importantes teóricos que defienden la tesis de la equivalencia cerebro-computador, como Carley,[115] lo hacen tomando como fundamento un discutible principio atribuido a Turing que afirmaría que a partir de un cierto nivel de complejidad todos los artificios computqacionales son equivalentes, excepto por su velocidad, lo que daría estatuto análogo al cerebro y a cualquier computador representado por una Tm.

Dentro de este contexto, nos ha parecido relevante lo que Norbert Wiener afirmó en 1950 por su sentido no reduccionista. Enfatizó los niveles de organización, concepto que permite pensar en sistemas definidos por una legalidad propia y parece exceder los aspectos puramente computacionales en tanto que las estructuras topológicas son también organizaciones pero no espacios de medida. Refiriéndose a lo que nos define como seres humanos dijo: No somos una materia que permanece sino organizaciones que se perpetúan (*Cibernética y sociedad*, Ed. Sudamericana, 1958. Tr. de José Novo, p. 90). Algunas páginas después continúa: "La individualidad corporal es la de una llama más que la de una piedra, es una forma más que una sustancia" (*Op. cit.* p. 96). Estas afirmaciones hay que entenderlas dentro de un contexto en el que lo que preocupaba a Wiener era poner en evidencia la especificidad nomológica que hace inteligibles a los sistemas. Desde este punto de vista, los organismos constituimos bolsones antientrópicos que nos desarrollamos adquiriendo cada vez niveles más complejos de organización, dentro de determinados límites, en contra del segundo principio de termodinámica de Clausius, cuya vigencia como principio que le impone finitud temporal al universo como sistema mecánico no ha sido significativamente cuestionada. Wiener concebía a los organismos como mensajes en la medida que la información que portan puede definirse legítimamente por su grado de organización. De esta manera, por ejemplo, la teletransportación de personas le parecía teóricamente admisible pero técnicamente improbable, en función de los recursos disponibles. Asimismo, vaticinaba un futuro, que afortunadamente vivimos, en el que sería creciente la importancia de la comunicación hombre-máquina y máquina-máquina.

En lo que sigue, considerando la posibilidad de diferentes niveles de organización en interacción recíproca pero con autonomía nomológica, nos proponemos defender como tesis que lo que denominamos mente es una forma peculiar de organización de representaciones que nos da identidad, sentido de identidad y que nos permite interactuar con el mundo comunicándonos y autorregulándonos. Tal organización, puede asumirse, se ha instalado en un órgano evolutivamente diseñado con especificidad, que llamamos cerebro a través de vehículos bioquímicos y eléctricos de tal suerte que constituye nuestro software que es cuantitativa y cualitativamente más rico que el de la máquina. Asimismo, denominamos representaciones a informaciones que nos permiten la constitución de imágenes, sensaciones, emociones, ideas, conceptos, creencias, etc.

Las representaciones son informaciones culturales y naturales que se instalan en nuestro cerebro a través de vehículos materiales como las ondas electromagnéticas, sonoras, etc., mediados

115 Declaraciones de Carley a la revista *Free Inquiry*, Vol. 15, Nro. 4, pp. 33-34.

por transmisores, probablemente bioquímicos. Los contenidos semánticos de nuestras representaciones primarias son ya una construcción mental en tanto que no son como las imágenes que almacena un instrumento de registro de datos sino que pueden entenderse como relaciones entre representaciones que con el desarrollo se enriquecen y adquieren un grado creciente de abstracción y complejidad. Las referidas relaciones no deben ser entendidas ni solo, ni principalmente, como de figuración o correspondencia en la medida que podemos aceptar que la teoría «fotográfica» del lenguaje, ejemplificada bien por el primer Wittgenstein, es claramente insuficiente.

La organización de representaciones más importante que se comienza a instalar en nuestro cerebro muy probablemente antes del hecho del nacimiento es el lenguaje. La denominada, por Piaget, lógica prelingüística o lo que en general podría denominarse pensamiento prelingüístico puede entenderse como el proceso inicial de adquisición de una competencia lingüística mínima y eminentemente pasiva. Es el uso y desarrollo del lenguaje lo que nos permite hablar con precisión del otro, del mundo que nos rodea y de nosotros mismos, como lo ha sostenido Donald Davidson.[116] En este proceso podría consistir el progresivo «ser consciente de». Los objetos o las cosas que forman parte de nuestro mundo son aquellos que nuestro lenguaje nos permite conceptualizar y nombrar. Así se entiende que los cronistas de la conquista hayan relatado que para los peruanos prehispánicos un soldado a caballo era inicialmente admisible como una sola entidad que por una boca arrojaba humo y por otra parte comía fierro. La relatividad a un lenguaje de las afirmaciones acerca de lo que existe es lo que nos ayudó a comprender al primer Wittgenstein cuando sentenció que los límites de nuestro lenguaje son los límites de nuestro mundo. El *Quine de on what there is* no dice más.

El lenguaje se comporta, por usar una metáfora, como nuestro software básico que define qué mensajes del ambiente reconocemos, aceptamos, rechazamos o, simplemente, no son inteligibles para nosotros. La manera como lo usamos expresa nuestra identidad psicológica y cultural. El manejo del lenguaje escrito resulta un salto importante porque permite participar de otros mundos y universalizar el propio. Esto explica que las comunidades de escritores y científicos cuentan en la medida de que son capaces de universalizar sus modelos de mundo. Es cierto que hay otras comunidades internacionales más sólidas como las ligas de *football* o de propietarios de bancos. Empero, ellos tampoco serían posibles si convenios y reglamentos escritos de aceptación generalizada. Es más, el papel moneda o dinero es posiblemente, actualmente, la expresión más generalizada de la cultura escrita.

Pero nuestro lenguaje natural y científico es más complejo que el software adecuado a una máquina de Turing. En las comunidades literarias, científicas y filosóficas puede distinguirse entre aquellas que conceptualizan hechos o fenómenos a través de un lenguaje y aquellas que usan el lenguaje para conceptualizar el propio lenguaje y construir nuevos lenguajes y también mundos nuevos que solo son construcciones lingüísticas sin referencias externas. Aunque este segundo contexto es creado por el hombre, a diferencia del llamado mundo natural, dentro de él se produce el descubrimiento de problemas por largo tiempo impensados y de soluciones sin precedentes, que pueden estar separados entre sí por siglos, como es el caso del problema planteado en la antigüedad por el postulado quinto de Euclides, cuya solución se ha producido a principios de nuestro siglo. La capacidad para crear soluciones, que no parece ser un problema solo de «software», es la característica específica de la mente que no se entiende desde la teoría de la máquina de Turing que solo puede hacer aquello que ya estaba previsto.

116 Declaraciones de D. Davidson publicadas en Borradori, Giovanna (1996) *Conversaciones filosóficas*, Ed. Norma, Bogotá, pp. 67-88.

Sin embargo, además de argumentos de hecho, como el anterior, pueden darse argumentos de principio para establecer claramente que entender nuestro lenguaje como un *software* es una metáfora suscitadora pero nada más, al menos por ahora. En efecto, considerando las propiedades generales de las estructuras lógicas y matemáticas en uso, una Tm está diseñada para aceptar un lenguaje expresado en funciones recursivas o un lenguaje que sea traducible a ellas. Ello significa que no son programables en ella, por ejemplo, las propiedades de los cardinales transfinitos para los que no rige el famoso axioma de Euclides que afirma «el todo es mayor que la parte». Por tanto una Tm solo procesa matemática finita, que tiene un enorme valor práctico pero solo es una parte de la matemática en uso. Asimismo, una Tm está sujeta a las limitaciones de la lógica standard para la que vale $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \wedge r) \rightarrow q)$, lo que equivale a afirmar que en ella las conclusiones no son revocables. Esto hace una Tm inadecuada para formalizar aquellos razonamientos frecuentes en la mente humana que conducen a revocar una conclusión por aparición de nuevos elementos de juicio.

Un elemento adicional a considerar es que frente a problemas matemáticos fácilmente inteligibles como tales pero de muy difícil solución, la Tm carece totalmente de recursos para decidir su insolubilidad. Por ejemplo, la ecuación diofantina $\mathbf{x + y + xy - 11 = 0}$, conocida como décimo problema de Hilbert, si es sometida a una Tm para que conteste si tiene raíces enteras o no, dará como resultado que la Tm pruebe indefinidamente tantos pares de enteros como le fuere posible, sin entregar resultado alguno. En la medida que la Tm no pararía en momento alguno, en términos especializados, se diría que este es un caso para el que la Tm no tiene el problema del *halting* resuelto. Empero, por procedimientos que expresan la capacidad de síntesis de la mente humana, el matemático ruso Matijasevic, cuando tenía solo 22 años, dio en 1970 una respuesta concluyente al probar que tal ecuación carece de soluciones enteras. La Tm no está diseñada para dar soluciones generales y todo lo que puede hacer en un caso como este es embarcarse en una búsqueda sin término.

A pesar de las limitaciones de principio, la metáfora del software, utilizada con prudencia, puede ser conceptualmente esclarecedora y compatible con desarrollos importantes de la investigación contemporánea. Permite, por ejemplo, ilustrar la inviabilidad del esfuerzo por explicar suficientemente las funciones mentales a partir de comportamientos neurofisiológicos o neuroquímicos. Si bien es cierto que el funcionamiento del soporte material de una Tm presupone como condición necesaria la vigencia del principio de causalidad electrodinámica para entender que un impulso electromagnético genere procesos de la misma naturaleza, también es cierto que este hecho es insuficiente para entender el encadenamiento interno del software que se rige por reglas de implicación lógica y no de causalidad física. Análogamente, el funcionamiento de la mente presupone como condición necesaria la vigencia del principio de causalidad para entender que una reacción bioquímica genere procesos de la misma naturaleza, lo que ciertamente es insuficiente para explicar el encadenamiento existente entre las representaciones que constituyen nuestra mente, el cual no parece consistir de nexos mecánicos, aunque fuesen mecánico cuánticos, sino de relaciones semánticas, sintácticas y pragmáticas.

La localización cerebral de las funciones mentales sugiere una imagen bastante compatible con la instalación de un *software*, a través de mecanismos que podrían ser semejantes a los hologramas,[117] en un *hardware*. La localización cerebral separada de las funciones sintácticas,

117 Al respecto puede leerse Pribram, Karl (1971) *Languages of the Brain*. Englewoods Cliffs, N.J. Prentice Hall. Nosotros estamos entendiendo el holograma como una metáfora, especialmente sugerente, para entender los procesos a través de los cuales se almacena información en el cerebro.

semánticas y pragmáticas del lenguaje sugiere un proceso de instalación largo y complejo así como una administración muy fina del espacio cerebral.

La conjetura de la naturaleza bioquímica de la información que se instala en el cerebro estaría corroborada por la conocida acción de los fármacos sobre las denominadas funciones mentales, la cual podría entenderse como un conjunto de reacciones bioquímicas. Las diferencias individuales podrían explicarse debido a que toda la interacción cerebro medio está condicionada por la información genética y, además debe regirse, por leyes probabilísticas y no deterministas. Esto también explica que la instalación, por ejemplo, del lenguaje, puede hacerse con notables variaciones de individuo a individuo.

A lo anterior se añade que hay indicadores empíricos de que la conducta humana produce cambios neuroquímicos en el cerebro de manera análoga a como lo hacen los fármacos. Las investigaciones de Sunderwirth[118] con adictos se proponen probar que hay un conjunto de reacciones neurobioquímicas comunes a las diferentes conductas adictivas. La variación la proporciona el objeto adictivo que puede ser en unos casos un fármaco y en otros la adicción a los caballos o la necesidad incontrolable de sexo. Esto sugiere que la conducta adictiva instala en el cerebro un «*software*» que garantiza su continuidad y fortalecimiento.

El punto de vista aquí sostenido tendría como consecuencia inmediata más que resolver el llamado problema mente-cuerpo, simplemente, disolverlo, pues no necesitamos concebir dos entidades de distinta naturaleza como pensó Descartes ni pensar en una cosa, en el sentido tradicional, que consiste en concebirla regida por un conjunto de leyes de la misma naturaleza. En efecto, se trata de pensar más que en entidades en niveles de organización. Hay una organización bioquímica regida por leyes causales con capacidad, por ahora inestimable, de complejización creciente y que siempre está en estado de incomplección. Hay, además, una organización de segundo orden, que denominamos mente, que consiste en una organización de esquemas mentales que usan un vehículo bioquímico pero que se rigen por leyes propias, y cualitativamente distintas de las bioquímicas, en el sentido de que no son leyes mecánicas sino sintácticas, semánticas y pragmáticas. Esto de ninguna manera reintroduce el dualismo tradicional en la medida que sería absurdo argumentar que el reconocimiento de que el *software* de un computador se rige por reglas lógicas y no por causalidad mecánica es sostener un dualismo cartesiano actualizado en la versión *software-hardware*. Es muy claro para cualquier persona informada en teoría de la máquina que en este nivel carece de sentido hablar de dos sustancias distintas. Lo que es relevante es reconocer la existencia de niveles autónomos de organización donde los menos complejos son solo condiciones necesarias o soportes de los más complejos.

Una posible consecuencia de este punto de vista parece ser que una mente solo es reconocible por otra mente con la que guarda correspondencia de algún tipo. Si dos sistemas de representaciones mentales fueran radicalmente distintos, simplemente serían ininteligibles entre sí y los respectivos individuos podrían negar, recíprocamente, que los otros poseen mente. Esto podría permitir entender que cuando se hizo los primeros contactos con el hombre americano los teólogos europeos hayan sostenido que carecía de razón. Otra posible consecuencia es que una mente se autorreconozca solo mediada por el reconocimiento de otra mente.

118 Respecto de los presuntos mecanismos neuroquímicos a través de los que las conductas almacenan información en el cerebro puede leerse Sunderwirth, Stanley, et alt. (1996) Neurochemistry and sexual addiction, Sexual Addiction &Compulsivity, Vol. 3, Number 1, Brunner/Mazel, Inc.

PRUEBAS DE AUTOEVALUACIÓN

Lectura: La inducción clásica
Autor: Luis Piscoya Hermoza

1. Según Stuart Mill, la validez de la inferencia que afirma «Si todas las manzanas de la muestra son rojas, entonces toda manzana es roja», presupone:

a) que la inducción es justificable.
b) la uniformidad de las manzanas.
c) la regularidad del color de las manzanas.
d) la validez de las leyes aristotélicas del silogismo.

2. La deducción que afirma «Si hay hombres que son mortales, entonces hay mortales que son hombres», es según Mill:

a) una seudoinducción.
b) una seudoinferencia.
c) un caso de inferencia amplificadora.
d) una seudodeducción.

3. Stuart Mill criticó como criterio de validez lógica:

a) la deducción con premisa mayor inductiva.
b) el silogismo que tiene como premisa mayor el principio de uniformidad de la naturaleza.
c) que de premisas verdaderas se deduzcan solo conclusiones verdaderas.
d) la inferencia de la muestra al universo.

4. Según Stuart Mill la lógica inductiva nos proporciona reglas para:

a) evaluar inducciones realizadas.
b) crear nuevas inducciones.
c) determinar la inducción que necesitamos.
d) descubrirá las conclusiones que necesitamos.

5. Una inferencia inductiva se justifica lógicamente, según Stuart Mill cuando:

a) es traducible a un silogismo cuya premisa mayor es de forma A.
b) su premisa mayor expresa muchas cosas análogas.
c) su premisa mayor es un caso particular del principio de uniformidad.
d) el principio de uniformidad de la naturaleza ha sido correctamente deducido.

6. Según Stuart Mill, la deducción axiomática de las leyes científicas:

a) es compatible con la indicación.
b) es incompatible con la inducción.
c) convierte en leyes a las inducciones derivadas.
d) presupone un único axioma de probabilidad.

7. La ley de causalidad, según Stuart Mill, no es aplicable a:

a) los fenómenos uniformes diacrónicos.
b) las sucesiones temporales.
c) la comprensión aditiva de la química.
d) a eventos simultáneos.

8. Según Stuart Mill ¿cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a) todas las relaciones de invarianza son causales.
b) toda relación causal es incondicionada.
c) la relación causal es un tipo de relación de invarianza.
d) toda relación de concordancia es causal.

9. Las leyes heteropáticas se caracterizan por:

a) ser heterogéneas.
b) no ser sumativas.
c) pertenecer al campo de las ciencias sociales.
d) ser inducciones derivadas.

10. Si se experimenta un nuevo método de enseñanza con un grupo de alumnos de matemática y otro de física, obteniéndose en ambos casos mejoramiento en el aprendizaje, atribuir este mejoramiento al nuevo método de enseñanza es compatible con el método de:

a) la diferencia.
b) las variaciones concomitantes.
c) residuo.
d) la concordancia.

11. ¿Cuál de las siguientes fórmulas expresa la invalidez lógica de la inducción de acuerdo a las reglas de PM?

a) $(\forall x)\ P(x) \rightarrow (\forall x)\ Q(x)$
b) $(\exists x)\ (P(x) \rightarrow (\forall y)\ P(y))$
c) $(\exists y)\ P(y) \rightarrow (\forall x)\ P(x)$
d) $(\exists x)\ Q(x) \rightarrow [\ (\forall x)\ P(x) \rightarrow (\exists x)\ Q(x)]$

12. El método que consiste en probar que la presencia de una causa produce un efecto y su ausencia lo suprime es el método:

a) de la diferencia.
b) del residuo.
c) indirecto de la concordancia.
d) indirecto de la diferencia.

13. Si mediante un experimento de enseñanza se introducen refuerzos en el proceso que mejoran el aprendizaje entonces la conclusión puede obtenerse mediante el método de:

a) la concordancia.
b) la diferencia.
c) las variaciones directas.
d) las variaciones concomitantes.

14. Según Stuart Mill, la deducción:

a) es previa a la inducción.
b) incluye a la inducción por ser más general.
c) incluye a la inducción como una fase.
d) excede en contenido a la inducción.

15. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

a) las inferencias inductivas y deductivas son igualmente conclusivas.
b) las inferencias inductivas no son conclusivas porque admiten excepciones.
c) los silogismos válidos son inferencias inductivas.
d) las inferencias inductivas proceden de lo particular a lo general.

Lectura: Ciencia y Seudociencia

Autor: Lakatos, Imrre

Fuente: Philosophy of the Science editado por Martín Curd y J. Covesi. W.W.W. Norton & Company, 1998.

1. Del texto de Lakatos, se deduce que para Popper el cambio científico es principalmente:

a) de naturaleza histórica.
b) originado por el descubrimiento de la verdad.
c) de naturaleza factual.
d) de naturaleza lógica.
e) causado por anomalías.

2. Según Lakatos, el filósofo Kuhn incurre, para explicar el cambio científico, en el error de:

a) otorgar demasiada importancia a la historia de la ciencia.
b) no comprender la falsación de Popper.
c) no considerar las hipótesis auxiliares.
d) obviar que se investiga redes de hipótesis y no hipótesis aisladas.
e) subestimar el aspecto metodológico.

3. Del texto se deduce que Popper en su criterio de demarcación, concede especial importancia a:

a) la lógica deductiva.
b) los contraejemplos.
c) la lógica inductiva.
d) la verificación de hipótesis.
e) el cumplimiento de las predicciones.

4. Lakatos sostiene que la diferencia entre ciencia y seudociencia es:

a) por grado de aceptabilidad.
b) clara y distinta.
c) gradual y precisa.
d) súbita y programática.
e) de fecundidad progresiva.

5. Según Lakatos el valor de la ciencia radica en que:

a) es un estado mental válido.
b) su validez es independiente del error.
c) su verdad no depende de estados mentales sino de los fenómenos.
d) su validez radica en su inteligibilidad.
e) su verdad es factual.

6. Según Lakatos, Newton ejemplifica adecuadamente:

a) la independencia entre la verdad científica y la creencia en la ciencia.
b) las limitaciones del exprimentalismo de Ampère.
c) la explicación de la lógica inductiva probabilista.
d) al científico que cuando publicó su obra, esta ya estaba refutada.
e) físico probabilista.

7. De acuerdo al texto de Lakatos, Halley:

a) trabajó en el programa de Newton pero desestimó la hipótesis de Kepler y de las hipérbolas.
b) se salió del programa de Newton e ingresó en el de Kepler.
c) calculó con éxito para la órbita de un cometa la ecuación de la parábola y de la hipérbola.
d) refutó la teoría de Newton desde dentro pero no fue adecuadamente reconocido.
e) confirmó la Teoría de Kepler.

8. La crítica de Lakatos al marxismo consiste en que:

a) es filosofía y no ciencia.
b) ajusta las hipótesis a los hechos.
c) su «cinturón protector» de hipótesis ha sido insuficiente.
d) acomoda los hechos a sus intereses.
e) acomoda los hechos a las hipótesis.

9. De la cita de Hume proporcionada por Lakatos, se deduce que:

a) lo que no es matemática carece de sentido
b) lo que no es experimental carece de sentido
c) lo que no es experimental o matemático carece de sentido
d) lo que es experimental y matemático carece de sentido
e) solamente el escepticismo tiene sentido.

10. Para Lakatos el error mayor de Kuhn radica en:

a) no haber entendido el falsacionismo de Popper
b) haber identificado el cambio científico con el cambio de credo
c) haber subestimado los programas de investigación

d) haber confundido creencias religiosas con conocimientos.
e) haber subestimado el «cinturón protector» constituido por las hipótesis auxiliares.

11. Lakatos define como un crimen intelectual a la:

a) creencia en teorías seudocientíficas.
b) presencia de supersticiones en un programa científico.
c) discriminación religiosa y política de los científicos.
d) adhesión incondicional a una idea.
e) tenacidad demostrada por algunos científicos.

12. Del texto leído se deduce que:

a) las pruebas científicas válidas están más allá de toda duda.
b) los estándares de prueba de la teología eran utópicos.
c) los estándares de prueba de la mecánica clásica eran alcanzables.
d) solo la inducción experimental garantiza cientificidad.
e) las leyes científicas se deducen de los hechos.

13. Según Lakatos, Popper:

a) proporcionó principalmente un criterio para discriminar entre teoría y seudoteoría.
b) solo aceptó una refutación de hipótesis más allá de toda duda.
c) dio ejemplos de teorías científicas válidas sin un ápice de evidencia en su contra.
d) advirtió que la refutación se tornaba en un problema de lealtad y reverencia.
e) principalmente se esforzó en distinguir entre método científico y no científico.

14. Según el artículo de Lakatos leído ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera respecto de Popper y Kuhn?

a) ambos han rechazado el verificacionismo trivial.
b) ambos han rechazado el inductivismo.
c) ambos han aportado conceptos complementarios para evaluar los programas de investigación.
d) ambos han creado mitos sobre el cambio científico.
e) ambos privilegian los experimentos cruciales.

15. ¿Acepta Lakatos la validez del argumento sobre la asimetría entre verificación y refutación en la ciencia?

16. ¿Cuál es el argumento que utiliza Lakatos para superar las tesis de Popper y de Kuhn?

Lectura: La epistemología genética

Autor: Jean Piaget

Fuente: *Genetic Epistemology*. New York, Columbia University Press, 1970, pp. 1 - 40. Traducción al castellano de Luis Piscoya Hermoza.

1. La concepción de la lógica de Piaget difiere de la de los positivistas en que:

a) afirma la existencia de una lógica prelingüística.
b) niega la validez de algunas tautologías.
c) usa un concepto de isomorfismo matemático.
d) atribuye importancia notable al proyecto Bourbaki.
e) afirma la existencia de sistemas alternativos.

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa según el constructivismo de Piaget?

a) la lógica no se identifica con el lenguaje.
b) los sistemas lógicos complejos no pueden probar su propia consistencia.
c) el conocimiento científico avanza a través de descubrimientos.
d) no hay frontera precisa entre descripción e interpretación.
e) el orden lógico no es incompatible con el orden evolutivo.

3. Según Piaget, el conocimiento científico consiste en:

a) reproducir fielmente las características de la realidad.
b) crear conceptos sobre objetos y procesos que son construcción del sujeto.
c) afirmar objetivamente lo que ocurre en la realidad.
d) establecer un paralelismo entre la lógica y los hechos.
e) reconstruir racionalmente la realidad.

4. La epistemología genética se diferencia de lo que Piaget denomina puntos de vista tradicionales en que la epistemología:

a) tradicional da importancia al análisis lógico.
b) propone un análisis sólo diacrónico.
c) genética propone un análisis sincrónico.
d) genética incluye el análisis sincrónico y diacrónico.

5. De acuerdo a la tesis de Piaget, la formalización lógica es para la explicación del conocimiento humano:

a) condición suficiente pero no necesaria.
b) condición necesaria y suficiente.
c) condición necesaria pero no suficiente.
d) condición insuficiente e innecesaria.

6. Según Piaget, los conceptos matemáticos tienen su origen en:

a) ideas innatas
b) esquemas mentales
c) propiedades de los objetos
d) desplazamientos y rotaciones de los objetos
e) desplazamientos y rotaciones de los sujetos

7. Las raíces del pensamiento lógico se encuentran en:

a) el lenguaje.
b) el pensamiento operacional.
c) la coordinación de acciones.
d) la abstracción reflectiva.
e) la interacción secuencial.

8. El desarrollo reconstructivo de la matemática del grupo Bourbaki ha mostrado que:

a) el concepto de estructura madre es reductible a otro más fundamental.
b) el concepto de categoría se deriva del de conjunto.
c) el orden cronológico no coincide con el orden lógico.
d) que la reconstrucción racional de la matemática no es posible.

9. El número *aleph subcero*:

a) es un cardinal par.
b) es un cardinal impar.
c) no es un número natural.
d) es un ordinal transfinito

10. Según Piaget el concepto de *correspondencia uno a uno* **se diferencia del de** *simultaneidad* **en que el primero es:**

a) deducido y el segundo construido.
b) construido y el segundo deducido.
c) primitivo y el segundo deducido.
d) reducible y el segundo construido.

11. Según Piaget, la simultaneidad:

a) se percibe físicamente.
b) es una noción derivada.
c) es una noción irreductible.
d) es un concepto primitivo.

12. La hipótesis ontogenética de Piaget afirma que:

a) el conocimiento tiene un origen socio-histórico.
b) el desarrollo de la especie produce el desarrollo social.
c) el desarrollo de cada individuo es paralelo al desarrollo lógico.
d) el desarrollo de cada individuo reproduce el de la especie.
e) la lógica es prelingüística.

13. Piaget usa la hipótesis ontogenética para:

a) refutar a los neopositivistas.
b) darle base experimental a la psicología.
c) darle base experimental a la epistemología.
d) negar la historicidad del conocimiento.
e) establecer etapas en el desarrollo.

14. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones recoge mejor la hipótesis principal de la epistemología genética?

a) la reconstrucción lógica del conocimiento es paralela al desarrollo de la mente.
b) hay una lógica prelingüística que no consideran relevante los positivistas lógicos.
c) hay conceptos científicos primitivos y conceptos derivados en toda ciencia.
d) la reconstrucción racional del conocimiento no se ajusta a la lógica sino a la historia.

15. El fundamento genético de relaciones como «mayor que» y «menor que» es:

a) la reversibilidad implicada por los conceptos.
b) la coordinación general de acciones.
c) los conceptos de estructura de grupo y grupoide.
d) un análisis regresivo de las coordinaciones del lenguaje.

Lectura: Las tres tareas de la epistemología

Autor: Hans Reichenbach

Fuente: Tomado de, ***Experience and Prediction***, *The University of* Chicago Press, 1938, pp. 3-16. Traducción de Luis Piscoya Hermoza.

1. La epistemología no se interesa en:

a) las proposiciones científicas.
b) el orden del pensamiento científico.
c) las conexiones lógicas entre proposiciones matemáticas.
d) factores arbitrarios como las unidades de medida.

2. Los epistemólogos estudian fundamentalmente:

a) el pensamiento científico.
b) los procesos del conocimiento científico.
c) la verdad de los hechos científicos.
d) las proposiciones científicas.

3. Los científicos proponen sus teorías:

a) en un orden lógico estricto.
b) en un orden lógico reconstruible.
c) en un orden cronológico.
d) a través de pensamientos claros y distintos.

4. Reconstruir el conocimiento racionalmente significa:

a) reconstruir los procesos de pensamiento que lo generaron.
b) poner un conjunto de proposiciones en orden lógico.
c) ordenar un conjunto de hechos en forma implicativa.
d) describir el conocimiento tal como ha sido producido.

5. Distinguir entre el conocimiento como proceso y el conocimiento como resultado significa esencialmente:

a) diferenciar entre inferencias y conclusiones de las mismas.
b) distinguir entre un proceso real y un proceso mental.
c) diferenciar un proceso real de un conjunto de enunciados.
d) distinguir entre lenguaje y metalenguaje.

6. Al epistemólogo le interesa fundamentalmente:

a) todo conocimiento.
b) el plano mental.
c) los procesos científicos.
d) el lenguaje científico.

7. El estudio de las decisiones implicadas es tarea de la

a) moderna epistemología.
b) epistemología crítica.
c) descripción psicológica.
d) predicción científica.

8. Los sistemas de medición son fundamentalmente:

a) irracionales.
b) no-aléticos.
c) dependientes de voliciones personales.
d) irrelevantes para el epistemólogo.

9. No son parte de las relaciones internas del conocimiento

a) las relaciones de orden cronológico.
b) las relaciones implicativas.
c) la verdad de las proposiciones.
d) la evidencia científica.

10. Poincaré está equivocado porque:

a) en el conocimiento científico las convenciones son irrelevantes.
b) las convenciones no afectan a los axiomas de la ciencia.
c) las consecuencias de una convención son también convenciones.
d) las consecuencias de una convención no son convenciones.

11. Del texto de Reichenbach se deduce que la influencia de la Segunda Guerra mundial en el desarrollo acelerado de la física y de la cibernética:

a) no interesa a la psicología del conocimiento
b) no es un tema propio de la sociología del conocimiento
c) es un tema propio de la lógica de la ciencia
d) carece de interés para la epistemología

12. La tarea de determinar los requisitos intelectuales para ser un buen investigador científico corresponde a:

a) los aspectos internos de la investigación científica

b) los lógicos de la ciencia expertos en la captación de la verdad.
c) quienes analizan la estructura de las teorías.
d) los aspectos externos al proceso de investigación científica.

13. El pensamiento mágico dominante en muchas de las comunidades consideradas primitivas o subdesarrolladas, es un obstáculo, para la investigación científica de carácter eminentemente:

a) psicológico.
b) interno.
c) sociológico.
d) cultural.

14. En su opinión Reichenbach, según el texto leído, es en mayor medida un representante:

a) del punto de vista falsacionista.
b) de la concepción heredada.
c) de la epistemología estructuralista.
d) de la epistemología genética.

15. ¿A cuál de las siguientes teorías sería más difícil o discutible aplicarle el criterio de reconstrucción racional de Reichenbach?

a) La teoría de la evolución de Darwin.
b) La teoría monetaria de Keynes.
c) La mecánica clásica de Newton.
d) Al Moldeamiento skinneriano.

* Use la lectura proporcionada por el profesor y el *Diccionario de Filosofía* de José Ferrater Mora, versión en cuatro tomos.

Lectura: ¿Qué es la epistemología?

Autor: Luis Piscoya Hermoza

1. Del texto *¿Qué es la epistemología?* se deduce que:

a) la epistemología es más general que la filosofía de la ciencia.
b) toda filosofía de la ciencia usa métodos lógicos.
c) la epistemología es un tipo especial de filosofía de la ciencia.
d) la epistemología se identifica con la teoría del conocimiento.

2. El denominado modelo hipotético-deductivo es de especial importancia para la epistemología contemporánea porque:

a) fue desarrollada por Euclides en el siglo III a.C.
b) diferencia a los neopositivistas de Popper.
c) proporciona un criterio de teoría filosófica.
d) proporciona un criterio de demarcación.

3. Lo que caracteriza a la posición lógico-metodológica de Popper es:

a) su rechazo al modelo hipotético deductivo.
b) asumir que el investigador solo puede rechazar hipótesis.
c) sostener que el investigador debe probar la verdad de su hipótesis.
d) asumir la universalidad de la verdad de las leyes científicas.

4. Un indicador de la influencia del modelo hipotético deductivo en los libros de metodología es:

a) la supresión del concepto de verificación de hipótesis.
b) propiciar la contrastación estadística de las hipótesis.
c) la introducción de totalidades espacio-temporales.
d) introducir el criterio de conmensurabilidad de las teorías.

5. La expresión de Ortega y Gasset «sabios ignorantes» hace alusión a:

a) los riesgos del uso del modelo hipotético deductivo.
b) los peligros de la alta especialización en lógica.
c) un medio de salvar el rigor lógico y observacional.
d) los riesgos de perder la perspectiva holística.

6. Para los neopositivistas, la tarea central de la epistemología era el estudio de la(s):

a) facultad de conocer.
b) psicología del descubrimiento.
c) proposiciones científicas.
d) geometría de Euclides.
e) historia de la ciencia.

7. El paradigma propuesto por Dilthey enfatizó la:

a) preeminencia de la explicación.
b) unidad de la ciencia.
c) hegemonía del criterio de predicción.
d) bipartición de la ciencia.
e) hegemonía de la física.

8. Las discrepancias más profundas en cuanto a concepción de la ciencia se produjeron entre:

a) Frege y Popper.
b) Russell y los neopositivistas.
c) Schlick y los positivistas.
d) Dilthey y los neopositivistas.
e) la escuela comprensiva y Dilthey.

9. Una teoría es:

a) un conjunto de enunciados lógicamente ordenados.
b) una concepción de la realidad.
c) una comprensión de la realidad.
d) una explicación de los principios últimos.
e) una organización lógica de los hechos.

10. Reichenbach discrepa con Popper porque propone:

a) que la epistemología debe usar métodos lógicos.
b) una estructura lógica peculiar para las leyes científicas.
c) la aceptación de la inducción como procedimiento lógico de la ciencia.
d) la irregularidad de las leyes científicas.
e) la primacía de la probabilidad estadística sobre la probabilidad lógica.

11. Si la tesis de la inconmensurabilidad de las teorías es correcta, entonces:

a) no hay criterio para decidir qué es una teoría.
b) no hay criterio para decidir cuál es objetivamente verdadera.
c) las comparaciones entre teorías son posibles.

d) no se produce cambio de paradigmas.
e) hay conmensurabilidad metodológica.

12. Según Bunge, la tesis que define el grado de verdad de una proposición en términos de su probabilidad incurre en una:

a) falacia del *modus ponens*.
b) falacia del *modus tollens*.
c) en una falacia que se basa en $(p \rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$
d) en el error de definir $Pr(\neg q) = 1 - Pr(q)$
e) falacia del regreso al infinito.

13. Según Bunge, la tesis de Popper que define la verosimilitud de una proposición en términos de su improbabilidad incurre en una:

a) falacia del dilema constructivo.
b) falacia del silogismo hipotético.
c) falacia del *modus tollens*.
d) falacia del *modus ponens*.
e) contradicción escolástica.

14. Según Bunge, el mayor error de la tesis de Carnap sobre la Confirmación sería:

a) otorgar valor 1 a la Ley de Ohm.
b) otorgar valor 0 a las leyes sociales.
c) dar la probabilidad máxima a las leyes que rigen infinitos objetos.
d) dar probabilidad 0 a las leyes de la física.
e) otorgar probabilidad 0 a toda ley científica.

15. Bunge al dar el mismo valor de probabilidad a las proposiciones '2+2= 4' y 'El chile es un alimento pobre', con el propósito de criticar a Carnal, incurre en el error de:

a) calcular erróneamente la probabilidad.
b) usar indebidamente la tautología de De Morgan.
c) ignorar la diferencia entre lo formal y lo empírico.
d) otorgar a las contradicciones el máximo contenido por ser improbables.
e) asignar probabilidades a eventos heterogéneos.

16. Según Bunge la mayor dificultad para aplicar el concepto de probabilidad a la ciencia es que:

a) las proposiciones del cálculo proposicional son un álgebra sigma.
b) las medidas de probabilidad se definen sobre anillos de conjuntos.
c) los conjuntos de proposiciones generalmente no son cerrados respecto de la disyunción.
d) los conjuntos de proposiciones no son esencialmente azarosos.
e) las afirmaciones de las teorías no son aleatorias.

Lectura: Verdad y prueba

Autor: Alfredo Tarski

Fuente: Artículo publicado en *Scientific American* con el título *Truth and Proof*, Junio 1969, Volumen 220, pp. 63-77. La traducción es de Luis Adolfo Piscoya Hermoza.

1. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es de construcción incorrecta según la definición del concepto de verdad de Aristóteles?

a) el teorema de Pitágoras es falso.
b) al científico le interesan los hechos verdaderos.
c) «eerdad» es aplicable solo a oraciones descriptivas.
d) premisas falsas pueden tener consecuencias verdaderas.
e) la redondez de la tierra no es verdadera ni falsa.

2. Tarski pone en evidencia que la afirmación «yo miento»:

a) es autorreferente porque habla de mí mismo.
b) pertenece al lenguaje objeto que uso cuando la formulo.
c) es construible si se distingue entre lenguaje objeto y metalenguaje.
d) afirma disimuladamente su propia verdad.
e) no es construible si se distingue entre lenguaje objeto y metalenguaje.

3. Según Tarski, la mayor virtud de la definición aristotélica del concepto de verdad es:

a) que posibilita la construcción solamente de contradicciones.
b) que, en general impide la construcción de paradojas como la del mentiroso.
c) aportar el enfoque semántico del uso de la verdad de lo que ocurre.
d) aportar el enfoque semántico del uso del término verdad.
e) aportar una prueba general de verdad a la ciencia.

4.- En el esquema de definición *«**p**» es verdadera en **L** si, y solo si **p***

a) La expresión*«**p**»* es una oración con estructura sintáctica.
b) *«**p**»* es un nombre con estructura sintáctica en el metalenguaje.
c) la letra ***p*** es la abreviación de una oración con estructura sintáctica.
d) *«**p**»* es un nombre abreviado construible en el lenguaje objeto.
e) ***p*** es un nombre metalingüístico por aparecer en el *definiens*.

5. El ejemplo de Tarski *La «nieve es blanca» es verdadera si , y solo si la nieve es blanca*:

a) convierte la aceptación de la blancura de la nieve en un asunto lógico.
b) propone un criterio general para decidir siempre la blancura de la nieve.
c) asume que es lógicamente legítimo asignar nombres a las oraciones.
d) asume que lógicamente solo los objetos son nombrables.
e) puede dar lugar a la paradoja de la blancura y no-blancura de la nieve.

6. El hecho de que el término falsedad esté sujeto a las mismas reglas de uso que el término verdad tiene como fundamento que:

a) no hay dificultad lógica en admitir la falsedad de ciertos hechos.
b) las paradojas lógicas no son verdaderas ni falsas sino circulares.
c) hay proposiciones verdaderas que no son deducibles de manera consistente como teoremas.
d) el término falso también expresa en general consistencia semántica.
e) el término falso no es construible de manera consistente en el lenguaje objeto.

7. Según Tarski, la característica lógica más importante que debe tenerse en cuenta para evitar, en lo posible, el uso científico de los lenguajes naturales es:

a) su inconsistencia generalizada.
b) la inconsistencia de algunos de ellos.
c) su exagerada amplitud y riqueza.
d) que contienen a los lenguajes objetos.
e) que contienen un metalenguaje separable.

8. La definición *El teorema de Pitágoras es verdadero en geometría si, y solo si la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa,* **es aplicando la tesis de Tarski:**

a) una prueba lógica de la verdad del teorema.
b) un uso incorrecto de su esquema de definición por no distinguir entre metalenguaje y lenguaje-objeto.
c) incorrecta porque el definiens es muy diferente del definiendum.
d) una equivalencia que hace innecesaria la prueba geométrica del teorema.
e) una equivalencia que distingue correctamente entre una proposición y su nombre.

9. El enunciado *Si «p» es verdadera , entonces «p» es falsa*

a) configura completamente una paradoja.
b) para completar la paradoja debe añadírsele *«p» es verdadera.*
c) equivale a la contradicción*«p» es verdadera y «p» es falsa.*
d) puede interpretarse como media paradoja.
e) equivale a *«p» es falsa si, y solo si «p» es verdadera.*

10. La introducción de metalenguajes ha permitido evitar las paradojas, del tipo de las del mentiroso, debido a que sus reglas impiden la construcción de afirmaciones tales como:

a) Un filósofo dice: *Todo conocimiento es relativo*
b) Todo número entero tiene uno mayor que él
c) Un ateniense dice *Todos los cretenses son mentirosos*
d) Aristóteles dijo :*Todos los hombre son mortales*
e) Juanito dice: *Todos los hombre son falibles, incluido el Papa*

11. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones, según Tarski, es falsa en la *Aritmética* de Peano?

a) Toda verdad aritmética tiene un número de Gödel en el metalenguaje.
b) Cada fórmula y cada teorema tiene un número de Gödel.
c) Hay más pruebas que proposiciones verdaderas en el lenguaje objeto.
d) Hay más proposiciones verdaderas que pruebas en el lenguaje objeto.
e) Hay tantas proposiciones verdaderas como pruebas en el lenguaje objeto.

12. Según Tarski el concepto de verdad establece una relación semántica entre:

a) las oraciones y los objetos lingüísticos o no, que expresan.
b) solo las oraciones y los objetos percibibles que expresan.
c) los nombres y la realidad a la que corresponden.
d) las oraciones y los hechos que las prueban lógicamente.
e) los predicados y las propiedades de lo que es.

13. Según Tarski un metalenguaje se convierte automáticamente en inconsistente si:

a) contiene la definición de verdad de todos los teoremas del lenguaje objeto.
b) califica como verdadera a una fórmula no deducible.
c) es totalmente traducible al lenguaje objeto.
d) contiene al lenguaje objeto como subconjunto propio.
e) admite que premisas falsas pueden implicar consecuencias verdaderas.

14. Un resultado fundamental para la ciencia y la filosofía del trabajo de Tarski consiste en que:

a) la aplicación de la gödelización garantiza la codificación completa y el apareamiento de las oraciones verdaderas y de los teoremas.
b) podemos contar con una buena definición de verdad y automáticamente con un criterio adecuado de verdad.
c) contamos con una herramienta potente para evitar todo tipo de paradoja posible.
d) se ha aportado un criterio de verdad aplicable a la ciencia en general y especialmente a la lógica y a la matemática.
e) la definición de verdad no garantiza la existencia de criterio de verdad.

15. El resultado revolucionario que comunica Tarski en el artículo leído es que en toda teoría científica que contenga a la aritmética necesariamente se cumplirá que:

a) el conjunto de los números verdaderos contiene como una parte propia al de los números demostrables.
b) toda afirmación verdadera es necesariamente un teorema expresable o construible en el lenguaje objeto.
c) no toda afirmación verdadera es expresable en el metalenguaje de la teoría.
d) la intuición garantizará la verdad de los axiomas.
e) el conjunto de los números demostrables puede ser igual al de los números verdaderos si se usan axiomas adicionales.

16. La construcción de la antinomia del mentiroso está expresada mejor por la fórmula:

a) $(p \rightarrow \text{no } p) \wedge (\text{no } p \rightarrow p)$
b) $(\text{no } p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \text{no } q)$
c) $(\text{no } q \rightarrow p) \wedge q \rightarrow \text{no } p$
d) $p \rightarrow (p \wedge \text{no } p) \wedge (q \wedge \rightarrow \text{no } p) \rightarrow p$

17. Un sistema lógico prohibe:

a) transmitir la falsedad.
b) transmitir la verdad.
c) obtener la verdad desde la falsedad.
d) obtener la falsedad desde la verdad.
e) retrotransmitir la falsedad.

18. La antinomia del mentiroso es:

a) cualquier contradicción.
b) una contradicción entre dos proposiciones distintas.
c) una contradicción implicativa.
d) una implicación como el Modus Tollens.
e) una contradicción autorreferente.

19. Según Tarski, los resultados de Gödel en su famoso teorema:

a) discrepan con los suyos.
b) son equivalentes a los suyos.
c) son idénticos.
d) usan incorrectamente la gödelización.
e) son insuficientes.

20. Una propiedad del *Definiendum* y del *Definiens* que Tarski asume es:

a) la completitud.
b) la intercambiabilidad.
c) que deben estar en metalenguajes distintos.
d) que deben estar en el mismo lenguaje.
e) la no-intercambiabilidad.

(Teeteto 145 e-146a)